

## الفصل الثالث: البرمجة الخطية

### ( الثنائية و تحليل الحساسية أو ما بعد الأمثلية)

#### 3-1 المقدمة

يعد البرنامج الثنائي نقلة نوعية في تطور بحوث العمليات لما له من أهمية سواء على الصعيد النظري أو التطبيقي ، تقوم فكرته على أساس أن لكل مشكلة أنموذج برمجة خطية مشكلة ثنائية ترتبط معها، إذ أن حل أحدهما يُمكن من معرفة حل المشكلة الأخرى، بمعنى أن حل أحدهما يمكننا من الحصول على حلول لمشكلتي برمجة خطية. هذا ويساعد حل البرنامج الثنائي في الوصول إلى الحل الأمثل بشكل أسرع وذلك عندما يكون عدد قيود البرنامج الأولي أكبر من عدد قيود البرنامج الثنائي إذ إن حجم العمليات الحسابية في البرمجة الخطية يتوقف على عدد القيود أكثر من اعتماده على عدد المتغيرات. إن والفكرة الأساسية وراء نظرية الثنائية أن كل مشكلة من مشاكل البرمجة الخطية لها برنامج خطي يصاحبها في عملية صنع واتخاذ القرار. فمشاكل البرمجة الخطية التي تهدف إلى تعظيم الربح في النموذج الأصلي (الأولي) ستتحول إلى مشاكل تهدف إلى تدنية التكاليف في الانموذج الثنائي (المقابل)

#### 3-2/ أنموذج أو البرنامج الثنائي (المقابل) $Dual Model(Program)$

عند التحويل من الأنموذج الأولي إلى الأنموذج الثنائي يجب مراعاة ما يلي

- ◀ إذا كان عدد القيود (m) وعدد المتغيرات (n) في الأنموذج الأولي فإنها تصبح (m) من المتغيرات و (n) من القيود في الأنموذج الثنائي
- ◀ استبدال المتغيرات المشار إليها بالحرف (X) في الأنموذج الأولي إلى متغيرات المشار إليها بالحرف (Y) في الأنموذج الثنائي
- ◀ استبدال دالة الهدف (Z) من نوع (Max) في الأنموذج الأولي إلى دالة هدف (W) من نوع (Min) تكافئها عند الامثلية في الأنموذج الثنائي بمعنى  $Z^*=W^*$
- ◀ استبدال معاملات دالة الهدف بقيم الطرف الأيمن للقيود ، بحيث تصبح قيم الطرف الأيمن للأنموذج الأولي معاملات لدالة الهدف (W) للأنموذج الثنائي والعكس صحيح
- ◀ استبدال معاملات المتغيرات في القيود ، بحيث تصبح الصفوف في الأنموذج الأولي أعمدة الأنموذج الثنائي (مبدلة المصفوفة) والعكس صحيح

#### أ- إذا كان الأنموذج متناظر (Symmetric Model)

يقصد بالتناظر هو عملية توافق دالة الهدف مع القيود فإذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم (Max) فيجب ان تكون جميع القيود من نوع أقل ويساوي فقط والعكس صحيح فيما يخص دالة الهدف من نوع تقليل (Min). وعليه فإن لكل انموذج أولي (Primal) أنموذج مقابل أو ثنائي (Dual) وكما في الجدول ادناه وفي هذه المرحلة يجب ان نقارن بشكل جيد المعلومات المتوفرة للأنموذج الأولي والتي تتمثل  $(C_j, b_i, a_{ij})$  التي تساعد في بناء الأنموذج الثنائي ، إذ ان جميع المعلومات الأفقية تمثل الأنموذج الأولي وان جميع المعلومات العمودية تمثل الأنموذج الثنائي. ويجب ان ننظر إلى كل مشكلة سواء كانت أولية ام ثنائية بدقة وبشكل مستقل ومنفرد حتى نستطيع احتوى جميع المعلومات الخاصة لكل أنموذج وكالاتي

قسم إدارة صناعية-بحوث العمليات إمكانيات وتقنيات: الفصل الثالث البرمجة الخطية  
(الثانية و تحليل الحساسية)

البرنامج الأولي		المعاملات لـ (X)				أوجه المتراجحة	قيم الطرق الايمن
		X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	.....	X <sub>n</sub>		
المعاملات لـ (Y)	Y <sub>1</sub>	a <sub>11</sub>	a <sub>12</sub>	.....	a <sub>1n</sub>	≤	b <sub>1</sub>
	Y <sub>2</sub>	a <sub>21</sub>	a <sub>22</sub>	.....	a <sub>2n</sub>	≤	b <sub>2</sub>
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	Y <sub>m</sub>	a <sub>m1</sub>	a <sub>m2</sub>	.....	a <sub>mn</sub>	≤	b <sub>m</sub>
أوجه المتراجحة		≥	≥	.....	≥		
معاملات دالة الهدف		C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	.....	C <sub>n</sub>		

الجدول يبين العلاقة بين النموذج الأولي والثاني

وعليه فان الصيغة العامة للنموذج الأولي والثاني بشكله المتناظر هو كالآتي

النموذج الثاني	النموذج الأولي
(↓)	(↑)
$W = \sum_{i=1}^{i=n} b_i Y_i$	$Z = \sum_{j=1}^{j=n} C_j X_j$
S.T. $\sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} Y_i \geq C_j ; j = 1,2,.....,n$	S.T. $\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} X_j \leq b_i ; i = 1,2,.....,m$
$Y_i \geq 0 ; i = 1,2,.....,m$	$X_j \geq 0 ; j = 1,2,.....,n$

مثال: اكتب النموذج الثاني من نموذج البرمجة الخطية الأولي أدناه

(↑)

$$Z = 3X_1 + 5X_2$$

S.T.  $9X_1 + 2X_2 \leq 12 \dots \dots \dots Y_1$

$$6X_1 + 4X_2 \leq 10 \dots \dots \dots Y_2$$

$$7X_1 + 10X_2 \leq 15 \dots \dots \dots Y_3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل : بما ان النموذج متناظر ، وعليه فان نموذج البرمجة الخطية الثاني كالآتي

(↓)

$$W = 12Y_1 + 10Y_2 + 15Y_3$$

S.T.  $9Y_1 + 6Y_2 + 7Y_3 \geq 3 \dots \dots \dots X_1$

$$2Y_1 + 4Y_2 + 10Y_3 \geq 5 \dots \dots \dots X_2$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

ب- إذا كان النموذج غير متناظر (Non-Symmetric)

يقصد بالنموذج الغير التناظر بانه لا تتوافق دالة هدفه مع قيوده، وسيتم معالجة هذه الحالة مع المثال الاتي

قسم إدارة صناعية-بحوث العمليات إمكانيات وتقنيات: الفصل الثالث البرمجة الخطية  
(الثانية و تحليل الحساسية)

مثال (1): اكتب النموذج الثاني من نموذج البرمجة الخطية الأولي أدناه

(↓)

$$Z = 08X_1 + 15X_2 + 07X_3$$

S.T.  $9X_1 + 8X_2 + X_3 = 10 \dots\dots\dots Y_1$   
 $2X_1 + 6X_2 + 4X_3 \geq 16 \dots\dots\dots Y_2$   
 $3X_1 - 8X_2 - 2X_3 \leq 18 \dots\dots\dots Y_3$   
 $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

الحل : بما ان النموذج غير متناظر ، وعليه يجب تحويل جميع القيود في النموذج الى قيود من نوع أكبر ويساوي وكما تعلمنا مسبقاً في الصيغة القانونية وكالاتي

(↓)

$$Z = 08X_1 + 15X_2 + 07X_3$$

S.T.  $9X_1 + 8X_2 + X_3 \geq 10 \dots\dots\dots Y'_1$   
 $-9X_1 - 8X_2 - X_3 \geq -10 \dots\dots\dots Y''_1$   
 $2X_1 + 6X_2 + 4X_3 \geq 16 \dots\dots\dots Y_2$   
 $-3X_1 + 8X_2 + 2X_3 \leq -18 \dots\dots\dots Y'_3$   
 $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

وبعد ان اصبح النموذج متناظر ، يتم التحويل مباشرة الى النموذج الثاني وكالاتي

(↑)

$$W = 10(Y'_1 - Y''_1) + 16Y_2 - 18Y'_3$$

S.T.  $9(Y'_1 - Y''_1) + 2Y_2 - 3Y'_3 \leq 3$   
 $8(Y'_1 - Y''_1) + 6Y_2 + 8Y'_3 \leq 5$   
 $(Y'_1 - Y''_1) + 4Y_2 + 2Y'_3 \leq 7$   
 $Y'_1, Y''_1, Y_2, Y'_3 \geq 0$

نفترض بان

$Y_1 = (Y'_1 - Y''_1)$   
 $Y_3 = -Y'_3$

وعليه فان النموذج يصبح بالشكل الاتي

(↑)

$$W = 10Y_1 + 16Y_2 + 18Y_3$$

S.T.  $9Y_1 - 2Y_2 + 3Y_3 \leq 3$   
 $8Y_1 + 6Y_2 + 8Y_3 \leq 5$   
 $Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 \leq 7$   
 $Y_1 \text{ U.R.S. ; } Y_2 \geq 0 ; Y_3 \leq 0$

مثال (2): اكتب النموذج الثاني من نموذج البرمجة الخطية الأولي أدناه

قسم إدارة صناعية-بحوث العمليات إمكانيات وتقنيات: الفصل الثالث البرمجة الخطية  
(الثانية و تحليل الحساسية)

(↑)

$$Z = 3X_1 - 5X_2 + 7X_3$$

S.T.  $2X_1 + X_2 - 4X_3 + 2X_4 \geq 06 \dots\dots\dots Y_1$   
 $-X_1 + 3X_2 + 2X_3 + X_4 \leq 20 \dots\dots\dots Y_2$   
 $X_2 + X_3 - X_4 = -1 \dots\dots\dots Y_3$   
 $X_1 \leq 0; X_2, X_4 \geq 0; X_3 \text{ U.R.S.}$

الحل : بما ان الانموذج غير متناظر ، وعليه يجب تحويل جميع القيود في الانموذج الى قيود من نوع أكبر ويساوي وكما تعلمنا مسبقاً في الصيغة القانونية وكالاتي

(↑)

$$Z = 3X_1 - 5X_2 + 7X_3$$

S.T.  $-2X_1 - X_2 + 4X_3 - 2X_4 \leq -6 \dots\dots\dots Y_1$   
 $-X_1 + 3X_2 + 2X_3 + X_4 \leq 20 \dots\dots\dots Y_2$   
 $X_2 + X_3 - X_4 \leq -1 \dots\dots\dots Y_3$   
 $-X_2 + X_3 + X_4 \leq 1 \dots\dots\dots Y_4$   
 $X_1 \leq 0; X_2, X_4 \geq 0; X_3 \text{ U.R.S.}$

نفترض بان

$$X_3 = (X'_3 - X''_3)$$

$$X_1 = -X'_1$$

وعليه نعوض عن قيمة (X<sub>1</sub>,X<sub>3</sub>) في الانموذج

(↑)

$$Z = 3X_1 - 5X_2 + 7(X'_3 - X''_3)$$

S.T.  $2X'_1 - X_2 + 4(X'_3 - X''_3) - 2X_4 \leq -6 \dots\dots\dots Y'_1$   
 $X'_1 + 3X_2 + 2(X'_3 - X''_3) + X_4 \leq 20 \dots\dots\dots Y_2$   
 $X_2 + (X'_3 - X''_3) - X_4 \leq -1 \dots\dots\dots Y'_3$   
 $-X_2 + (X'_3 - X''_3) + X_4 \leq 1 \dots\dots\dots Y''_4$   
 $X'_1, X_2, X'_3, X''_3, X_4 \geq 0$

وبعد ان اصبح الانموذج متناظر ، يتم التحويل مباشرة الى الانموذج الثنائي وكالاتي

(↑)

$$W = -6Y'_1 + 20Y_2 - (Y'_3 - Y''_3)$$

S.T.  $2Y'_1 + Y_2 \geq -3$   
 $-Y'_1 + 3Y_2 + (Y'_3 - Y''_3) \geq 5$   
 $4Y'_1 + 2Y_2 + (Y'_3 - Y''_3) \geq 7$   
 $-4Y'_1 - 2Y_2 - (Y'_3 - Y''_3) \geq -7$   
 $-2Y'_1 + Y_2 - (Y'_3 - Y''_3) \geq 0$   
 $Y'_3, Y''_3, Y_2, Y'_1 \geq 0$

نفترض بان

$$Y_3 = (Y'_3 - Y''_3)$$

$$Y_1 = -Y'_1$$

وعليه فان الانموذج يصبح بالشكل الاتي

قسم إدارة صناعية-بحوث العمليات إمكانيات وتقنيات: الفصل الثالث البرمجة الخطية  
(الثانية و تحليل الحساسية)

(↑)

$$W = 6Y_1 + 20Y_2 - Y_3$$

S.T.  $-2Y_1 + Y_2 \geq -3$   
 $Y_1 + 3Y_2 + Y_3 \geq -5$   
 $-4Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \geq 7$   
 $4Y_1 - 2Y_2 - Y_3 \geq -7$   
 $2Y_1 + Y_2 - Y_3 \geq 0$   
 $Y_1 \leq 0; Y_2 \geq 0, Y_3 \text{ U.R.S.}$

وبالإمكان كتابة النموذج بالشكل الآتي

(↑)

$$W = 6Y_1 + 20Y_2 - Y_3$$

S.T.  $2Y_1 - Y_2 \leq 3$   
 $Y_1 + 3Y_2 + Y_3 \geq -5$   
 $-4Y_1 + 2Y_2 + Y_3 = 7$   
 $2Y_1 + Y_2 - Y_3 \geq 0$   
 $Y_1 \leq 0; Y_2 \geq 0, Y_3 \text{ U.R.S.}$

وكذلك يتم تحديد المترجمات للقيود والمتغيرات وفقاً لما يلي :

النموذج الأولي		النموذج الثاني
إشارة القيد من نوع أقل ويساوي ( $\leq$ )	↔	إشارة المتغير من نوع أكبر ويساوي ( $\geq$ )
إشارة القيد من نوع أكبر ويساوي ( $\geq$ )	↔	إشارة المتغير من نوع أقل ويساوي ( $\leq$ )
إشارة القيد من نوع مساواة (=)	↔	المتغير غير مقيد بإشارة (URS)
إشارة المتغير من نوع أقل ويساوي ( $\leq$ )	↔	إشارة القيد من نوع أقل ويساوي ( $\leq$ )
إشارة المتغير من نوع أكبر ويساوي ( $\geq$ )	↔	إشارة القيد من نوع أكبر ويساوي ( $\geq$ )
المتغير غير مقيد بإشارة (URS)	↔	إشارة القيد من نوع مساواة (=)

بالرجوع الى المثال (2) يمكن كتابة الانموذج المقابل بسهولة باستخدام الجدول اعلاه

النموذج الأولي	النموذج الثاني
(↑) $Z = 3X_1 - 5X_2 + 7X_3$ S.T. $2X_1 + X_2 - 4X_3 + 2X_4 \geq 06 \dots\dots\dots Y_1$ $-X_1 + 3X_2 + 2X_3 + X_4 \leq 20 \dots\dots\dots Y_2$ $X_2 + X_3 - X_4 = -1 \dots\dots\dots Y_3$ $X_1 \leq 0; X_2, X_4 \geq 0; X_3 \text{ U.R.S.}$	(↑) $W = 6Y_1 + 20Y_2 - Y_3$ S.T. $2Y_1 - Y_2 \leq 3$ $Y_1 + 3Y_2 + Y_3 \geq -5$ $-4Y_1 + 2Y_2 + Y_3 = 7$ $2Y_1 + Y_2 - Y_3 \geq 0$ $Y_1 \leq 0; Y_2 \geq 0, Y_3 \text{ U.R.S.}$

### 3-3 كيفية معرفة أو قراءة الحل الأمثل الثنائي من جدول الحل الأمثل الأولي

وبالعكس وفقاً لما يلي

القيمة المثلى للمتغير الثنائي (Y <sub>i</sub> ) إذا كان القيد من نوع أقل ويساوي	=	معامل المتغير الراكذ (+S <sub>i</sub> ) من صفه في جدول الحل الأمثل	
القيمة المثلى للمتغير الثنائي (Y <sub>i</sub> ) إذا كان القيد من نوع أكبر ويساوي	=	معامل المتغير الراكذ (-S <sub>i</sub> ) من صفه في جدول الحل الأمثل	
	=	معامل المتغير الراكذ (+R <sub>i</sub> ) من صفه في جدول الحل الأمثل	± M
القيمة المثلى للمتغير الثنائي (Y <sub>i</sub> ) إذا كان القيد من نوع مساواة	=	معامل المتغير الراكذ (+R <sub>i</sub> ) من صفه في جدول الحل الأمثل	± M

• يتم إضافة (-M) إذا كانت الدالة من نوع (Max) وكذلك إضافة (+M) إذا كانت الدالة من نوع (Min)

وتعرف القيمة المثلى الثنائية أو ما تسمى بأسعار الظل (Shadow Price) بأنها مقدار الزيادة أو النقصان في دالة الهدف نتيجة زيادة أو نقصان في الكميات المتاحة من ذلك المورد النادر بمقدار وحدة واحدة. وعند زيادة الكمية المتاحة من مورد معين بمقدار وحدة واحدة سوف يترتب على ذلك زيادة الربح المتحقق بمقدار معين ، ويطلق على هذه الزيادة في الربح والحاصلة نتيجة الحصول على وحدة واحدة إضافية من تلك الموارد بمصطلح (سعر الظل)

مثال: إذا كان لديك أنموذج البرمجة الخطية الآتي

$$\begin{aligned} & (\uparrow) \\ & Z = 120X_1 + 100X_2 \\ \text{S.T. } & 2X_1 + 2X_2 \leq 08 \dots\dots\dots Y_1 \\ & 5X_1 + 3X_2 \leq 15 \dots\dots\dots Y_2 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

المطلوب

- 1- اوجد الحل الأمثل الثنائي من جدول الحل الأمثل الأولي
- 2- اوجد الحل الأمثل الأولي من جدول الحل الأمثل الثنائي

قسم إدارة صناعية-بحوث العمليات إمكانيات وتقنيات: الفصل الثالث البرمجة الخطية  
(الثانية و تحليل الحساسية)

الحل:

1- يتم إيجاد جدول الحل الأمثل الأولي ومن بعدها يتم إيجاد الحل الأمثل الثاني وكالاتي

(↑)	Basic	120	100	0	0	R.H.S.
		X1	X2	S1	S2	
0	S1	2	2	1	0	08
0	S2	5	3	0	1	15
Z - Row		-120	-100	0	0	0
0	S1	0	4/5	1	-2/5	2
120	X1	1	3/5	0	1/5	3
Z - Row		0	-28	0	24	360
100	X2	0	1	5/4	-1/2	5/2
120	X1	1	0	-3/4	1/2	3/2
Z - Row		0	0	35	10	430

وعليه فان الحل الأمثل الأولي  $Z^*=W^*=430$  &  $X_1^*=3/2$  ,  $X_2^*=5/2$

إما الحل الأمثل الثاني  $Y_1^*=35$  ,  $Y_2^*=10$

ثانياً : نكتب الأنموذج الثاني

(↓)

$$Z = 8Y_1 + 15Y_2$$

$$S.T. \quad 2Y_1 + 5Y_2 \geq 120 \dots\dots\dots X_1$$

$$2Y_1 + 3Y_2 \geq 100 \dots\dots\dots X_2$$

$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

هناك عدة طرائق لإيجاد الحل الأمثل الثاني

أ- باستخدام الطريقة المبسطة الثانية (DSM)

قسم إدارة صناعية-بحوث العمليات إمكانيات وتقنيات: الفصل الثالث البرمجة الخطية  
(الثانية و تحليل الحساسية)

(↓)	Basic	08	15	0	0	R.H.S.
C <sub>B</sub>		Y1	Y2	S1	S2	
0	S1	-2	-5	1	0	-120
0	S2	-2	-3	0	1	-100
W - Row		-08	-15	0	0	0
15	Y2	2/5	1	-1/5	0	24
0	S2	-4/5	0	-3/5	1	-28
W - Row		-2	0	-3	0	360
15	Y2	0	1	-1/2	1/2	10
08	Y1	1	0	3/4	-5/4	35
W - Row		0	0	-3/2	-5/2	430

وعليه فإن الحل الأمثل الثاني  $Z^*=W^*=430$  &  $Y_1^*=35$ ,  $Y_2^*=10$   
إما الحل الأمثل الأولى  $X_1^*=3/2$ ,  $X_2^*=5/2$

ب- باستخدام الطريقة المبسطة ذات الجزء الكبير (BMS) أو الطريقة المبسطة ذات المرحلتين (2PS)

(↓)	Basic	08	15	0	0	M	M	R.H.S.
C <sub>B</sub>		Y1	Y2	S1	S2	R1	R2	
M	R1	2	5	-1	0	1	0	120
M	R2	2	3	0	-1	0	1	100
Z - Row		4M-8	8M-15	-M	-M	0	0	220M
15	Y2	2/5	1	-1/5	0	1/5	0	24
M	R2	4/5	0	3/5	-1	-3/5	1	28
Z - Row		$\frac{4}{5}M - 2$	0	$\frac{3}{5}M - 3$	-M	$-\frac{8}{5}M + 3$	0	28M+360
15	Y2	0	1	-1/2	1/2	1/2	-1/2	10
08	Y1	1	0	3/4	-5/4	-3/4	5/4	35
Z - Row		0	0	-3/2	-5/2	$\frac{3}{2} - M$	$\frac{5}{2} - M$	430

وعليه فإن الحل الأمثل الثاني  $Z^*=W^*=430$  &  $Y_1^*=35$ ,  $Y_2^*=10$



قسم إدارة صناعية-بحوث العمليات إمكانيات وتقنيات: الفصل الثالث البرمجة الخطية  
(الثانية و تحليل الحساسية)

إما الحل الأمثل الأولى  $X_1^*=3/2$  ,  $X_2^*=5/2$

**4-3 تحليل الحساسية أو تحليل ما بعد الامثلية: Sensitivity Analysis** تطرقنا

في هذا الفصل إلى بعض التفاصيل والقواعد الرياضية وسبل تحويل الأنموذج الرياضي الأولي إلى الأنموذج الثنائي(المقابل) ودرسنا العلاقات والخصائص التي تربط بين الأنموذجين والهدف من ذلك هو التوصل إلى كيفية أو معرفة تحليل الحساسية أو تحليل ما بعد الامثلية .والمقصود بتحليل الحساسية انه بعد أن يتم الوصول إلى الحل الأمثل الأولي لأي أنموذج رياضي الذي يعبر عن نشاطات مشروع ما وكانت الإدارة ترغب في إحداث بعض التغييرات على رأس المال ، زيادة الموارد المتاحة ، عدد العمال أو عدد العمال...الخ فإن مثل هذه التغييرات تؤدي إلى حدوث تغير في الأنموذج الأمثل مما يترتب عليه إعادة النظر في حل الأنموذج مرة أخرى والنظر إلى كثرة التغييرات التي تحدث في أي مشروع فإن إعادة حل الأنموذج الرياضي سوف تكون عملية مجهددة وتتطلب وقتاً كبيراً وتتطلب حسابات مكررة تتناسب طردياً مع المتغيرات والقيود للأنموذج مما يؤدي إلى حدوث بعض الأخطاء في الحسابات بسبب كثرتها . وعليه لتجاوز هذه الحالة يتم اللجوء إلى (تحليل الحساسية أو تحليل ما بعد الامثلية) والذي يدرس التغييرات التي تحدث في الأنموذج الأولي للمشروع وذلك بالاعتماد على الحل الأمثل ومن أهم هذه التغييرات

Ⓒ تأثيرات التغييرات في الإمكانيات المتاحة (Changing Affecting Feasibility) وتتضمن  
أ- التغيير في الطرف الأيمن (Changes in (RHS) Of Constraint): وعليه فإن القانون المستخدم

$$X_B = B^{-1}b \geq 0$$

إذ أن

$X_B$  : تمثل المتغيرات الأساسية ف جدول الحل الأمثل

$b$  : تمثل قيم الطرف الأيمن للقيود(التغير المدروس)

$B^{-1}$  : تمثل المصفوفة التي تقع تحت المتغيرات الأساسية في جدول الحل الأمثل باستثناء صف دالة الهدف

مثال (1): إذا كان لديك أنموذج البرمجة الخطية الآتي

(↑)

$$Z = 2X_1 + 5X_2$$

$$S.T. \quad X_1 + X_2 \geq 05 \dots\dots\dots Y_1$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 12 \dots\dots\dots Y_2$$

$$X_1 = 02 \dots\dots\dots Y_3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

وأن جدول الحل الأمثل كان معطى أدناه

(↑) $C_B$	Basic	R.H.S.	-M	0	-M	0	2	5
			R1	S2	R2	S1	X1	X2
5	X2	3	0	1/2	-3/2	0	0	1
0	S1	0	-1	1/2	-1/2	1	0	0
2	X1	2	0	0	1	0	1	0
Z - Row		19	M	5/2	$M - \frac{11}{2}$	0	0	0

ماذا يحدث لو (What If) استبدلنا قيم الطرف الأيمن

قسم إدارة صناعية-بحوث العمليات إمكانيات وتقنيات: الفصل الثالث البرمجة الخطية  
(الثنائية و تحليل الحساسية)

$$1. \begin{bmatrix} 15 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 2. \begin{bmatrix} 15 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$1- \mathbf{X}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{X}_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

وعليه فان الحل ممكن أما قيمة دالة الهدف الجديدة تحسب كالآتي

$$\mathbf{Z} = 2\mathbf{X}_1 + 5\mathbf{X}_2 = 2(1) + 5(2) = 12$$

or

$$\mathbf{Z} = \mathbf{C}_B \mathbf{X}_B = (5,0,2) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 12$$

$$2- \mathbf{X}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{X}_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \geq 0 \end{matrix}$$

وعليه فان الحل غير ممكن أما قيمة دالة الهدف الجديدة تحسب كالآتي

$$\mathbf{Z} = 2\mathbf{X}_1 + 5\mathbf{X}_2 = 2(2) + 5(1) = 9$$

or

$$\mathbf{Z} = \mathbf{C}_B \mathbf{X}_B = (5,0,2) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 9$$

ثم نعيد ترتيب البيانات عن طريق استبدال قيم الطرف القديمة بالجديدة وكذلك لقيمة Z أيضاً وكما مبين أدناه

(↑)	Basic	R.H.S.	-M	0	-M	0	2	5
$\mathbf{C}_B$			R1	S2	R2	S1	X1	X2
5	X2	1	0	1/2	-3/2	0	0	1
0	S1	-1	-1	1/2	-1/2	1	0	0
2	X1	2	0	0	1	0	1	0
Z - Row		9	M	5/2	$M - \frac{11}{2}$	0	0	0

ثم نكمل الحل باستخدام الطريقة المبسطة الثنائية (DSM) وكما تعلمنا مسبقاً

ب- إضافة قيد جديد Addition Of New Constraint

من المثال (1) وعلى افتراض تم إضافة القيد الآتي للمسألة

قسم إدارة صناعية-بحوث العمليات إمكانيات وتقنيات: الفصل الثالث البرمجة الخطية  
(الثانية و تحليل الحساسية)

1.  $X_1+2X_2 \leq 10$  ماذا سيحدث للمسألة  
2.  $2X_1+X_2 \leq 04$  ماذا سيحدث للمسألة

الحل : نختبر القيود فيما إذا كانت مؤثرة ام لا عن طريق التعويض بقيمة متغيرات القرار المثلى  $(X_1, X_2)$  وكالاتي

1.  $X_1=2, X_2=3 \rightarrow X_1+2X_2 \leq 10 \rightarrow \therefore (2)+2(3) \leq 10 \rightarrow 8 \leq 10$

(يحقق الشرط وهذا يعنى بان الحل ممكن) وعليه فان القيد غير مؤثر على المسألة

2.  $X_1=2, X_2=3 \rightarrow 2X_1+X_2 \leq 04 \rightarrow \therefore 2(2)+3 \leq 04 \rightarrow 07 \leq 04$

(لا يحقق الشرط وهذا يعنى بان الحل غير ممكن) وعليه فان القيد مؤثر على المسألة ويجب أتباع الاتي

القيد المضاف  $2X_1+X_2+S_3=04$

	RHS	R1	S2	R2	S3	S1	X1	X2
قيد $(-2)*X_1$	-4	0	0	-2	0	0	-2	0
قيد $(-1)*X_2$	-3	0	-1/2	3/2	0	0	0	-1
القيد المضاف	4	0	0	0	1	0	2	1
بالجمع (قيد $S_3$ )	-3	0	-1/2	-1/2	1	0	0	0

وعليه نكمل الحل باستخدام الطريقة المبسطة الثانية (DSM) لأن قيمة الطرف الأيمن للمتغير  $(S_3)$  سالبة بمعنى آخر (الحل غير ممكن) مع تمكين القيد الجديد للدخول في جدول الحل الامثل وكالاتي

(↑)	Basic	R.H.S.	-M	0	-M	0	0	2	5
$C_B$			R1	S2	R2	S3	S1	X1	X2
5	X2	3	0	1/2	-3/2	0	0	0	1
0	S1	0	-1	1/2	-1/2	0	1	0	0
2	X1	2	0	0	1	0	0	1	0
0	S3	-3	0	-1/2	-1/2	1	0	0	0
Z - Row		19	M	5/2	$M - \frac{11}{2}$	0	0	0	0
5	X2	0	0	0	-2	1	0	0	1
0	S1	3	-1	0	-1	1	1	0	0
2	X1	2	0	0	1	0	0	1	0
0	S2	6	0	1	0	-2	0	0	0
Z - Row		4	M	0	M-3	5	0	0	0

Ⓒ تأثيرات التغيرات في الامثلية (Changing Affecting Optimality) وتتضمن

أ- التغير في معاملات دالة الهدف Changes In The Objective Function وتتضمن ما يلي

← المتغيرات الأساسية:

1. في حالة وجود متغيرات وهمية من نوع  $(+S_i)$  (Slack Variable): فان

قسم إدارة صناعية-بحوث العمليات إمكانيات وتقنيات: الفصل الثالث البرمجة الخطية  
(الثانية و تحليل الحساسية)

$$(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = C_B B^{-1} \dots \begin{cases} \leq 0 \text{ in Min} \\ \geq 0 \text{ in Max} \end{cases}$$

2. في حالة وجود متغيرات اصطناعية (Artificial Variable)(R<sub>i</sub>): فان

$$(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = C_B B^{-1} \mp M \dots \begin{cases} -M \text{ in Min} \\ +M \text{ in Max} \end{cases}$$

← المتغيرات غير الأساسية: وتتمثل بقيم (X<sub>i</sub>) وكذلك المتغيرات الوهمية من نوع (Surplus Variable)(-S<sub>i</sub>)

$$\bar{C}_j = C_B B^{-1} P_j - C_j \dots \begin{cases} \leq 0 \text{ in Min} \\ \geq 0 \text{ in Max} \end{cases}$$

\* أو ممكن استخدام النموذج الثنائي لإيجاد قيم المتغيرات غير الأساسية في دالة الهدف

C<sub>B</sub>: تمثل معاملات المتغيرات الأساسية المأخوذة من دالة الهدف

C<sub>j</sub>: تمثل معاملات المتغيرات في دالة الهدف

$\bar{C}_j$ : تمثل معاملات المتغيرات من دالة الهدف المثلى المراد إيجادها

P<sub>j</sub>: تمثل عمود قيم المتغير (X<sub>i</sub>)

مثال(2): إذا كان لديك أنموذج البرمجة الخطية الاتي

$$\begin{aligned} & (\downarrow) \\ & Z = 40X_1 + 36X_2 \\ \text{s.T. } & X_1 \leq 08 \dots Y_1 \\ & X_2 \leq 12 \dots Y_2 \\ & 5X_1 + 3X_2 \geq 45 \dots Y_3 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

وأن جدول الحل الأمثل كان معطى أدناه

(↓)	Basic	R.H.S.	0	0	M	0	40	36
C <sub>B</sub>			S1	S2	R3	S3	X1	X2
40	X1	8	1	0	0	0	1	0
0	S2	25/3	5/3	1	-1/3	1/3	0	0
36	X2	5/3	-5/3	0	1/3	-1/3	0	1
Z - Row		380	-20	0	12 - M	-12	0	0

المطلوب: إذا تغيرت دالة الهدف من  $Z=40X_1+36X_2$  إلى

1-  $Z=48X_1+42X_2$

2-  $Z=52X_1+30X_2$

هل سيبقى الحل أمثلاً أم لا

الحل (1): لإيجاد المتغيرات الأساسية R1 ، S2 ، S1

قسم إدارة صناعية-بحوث العمليات إمكانيات وتقنيات: الفصل الثالث البرمجة الخطية  
(الثانية و تحليل الحساسية)

$$\therefore (Y_1, Y_2, Y_3) = C_B B^{-1} = (48, 0, 42) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5/3 & 1 & -1/3 \\ -5/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = (-22, 0, 14)$$

$$\therefore (S_1, S_2, R_1 - M) = (-22, 0, 14 - M)$$

$$\leq 0 \quad \leq 0$$

ولإيجاد المتغيرات غير الأساسية  $X_1, X_2, S_3$

$$\bar{C}_1 = C_B B^{-1} P_j - C_1 = (-22, 0, 14) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - 48 = 0$$

$$\bar{C}_2 = C_B B^{-1} P_j - C_2 = (-22, 0, 14) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 42 = 0$$

$$\bar{C}_3 = C_B B^{-1} P_j - C_3 = (-22, 0, 14) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -14 \leq 0$$

وعليه فإن الحل أمثل لأن جميع قيم صف دالة الهدف أقل ويساوي صفر، وان قيمة دالة الهدف الجديدة كالآتي

$$Z = 48X_1 + 42X_2 = 48(8) + 42(5/3) = 454$$

(2): لإيجاد المتغيرات الأساسية  $S_1, S_2, R_1$

$$\therefore (Y_1, Y_2, Y_3) = C_B B^{-1} = (52, 0, 30) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5/3 & 1 & -1/3 \\ -5/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = (2, 0, 10)$$

$$\therefore (S_1, S_2, R_1 - M) = (2, 0, 10 - M)$$

$$\geq 0 \quad \leq 0$$

ولإيجاد المتغيرات غير الأساسية  $X_1, X_2, S_3$

$$\bar{C}_1 = C_B B^{-1} P_j - C_1 = (2, 0, 10) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\bar{C}_2 = C_B B^{-1} P_j - C_2 = (-2, 0, 10) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\bar{C}_3 = C_B B^{-1} P_j - C_3 = (2, 0, 10) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -10 \leq 0$$

وعليه فإن الحل غير أمثل لأن ليس جميع قيم صف دالة الهدف أقل ويساوي صفر، وان قيمة دالة الهدف الجديدة

$$Z = 52X_1 + 30X_2 = 52(8) + 30(5/3) = 466$$

ثم نكمل الحل باستخدام الطريقة المبسطة الأولية (PSM) لإيجاد الحل الأمثل وكالاتي

قسم إدارة صناعية-بحوث العمليات إمكانيات وتقنيات: الفصل الثالث البرمجة الخطية  
(الثانية و تحليل الحساسية)

(↓)	Basic	R.H.S.	0	0	M	0	52	30
C <sub>B</sub>			S1	S2	R3	S3	X1	X2
52	X1	8	1	0	0	0	1	0
0	S2	25/3	5/3	1	-1/3	1/3	0	0
30	X2	5/3	-5/3	0	1/3	-1/3	0	1
Z – Row		466	2	0	10 - M	-10	0	0
52	X1	3	0	-3/5	0	-1/5	1	0
0	S1	5	1	3/5	-1/3	1/5	0	0
30	X2	10	0	1	1/3	0	0	1
Z – Row		456	0	-6/5	$\frac{52}{5} - M$	-52/5	0	0

ب- إضافة متغير جديد Addition Of New Variable: يتم احتساب قيمة المتغير الجديد وفقاً إلى في صف دالة الهدف (Z)

$$\bar{C}_j = C_B B^{-1} P_j - C_j \dots \dots \begin{cases} \leq 0 \text{ in Min} \\ \geq 0 \text{ in Max} \end{cases}$$

أما فيما يخص القيود

$$\bar{P}_j = B^{-1} P_j$$

إذا أن  $\bar{P}_j$  تمثل عمود قيم المتغير الجديد (X<sub>j</sub>)

من مثال (2) السابق: (1) لو تم إضافة متغير جديد (X<sub>3</sub>) وبمعامل (30) في دالة الهدف وبمعامل (-2) للقيود الأول وبمعامل (3) للقيود الثاني وبمعامل (-1) للقيود الثالث. هل سيبقى الحل امثلاً أم لا الحل:

$$\begin{aligned} (\downarrow) \\ Z &= 40X_1 + 36X_2 + 20X_3 \\ \text{S.T.} \quad X_1 &- 2X_3 \leq 08 \dots \dots Y_1 \\ &X_2 + 3X_3 \leq 12 \dots \dots Y_2 \\ &5X_1 + 3X_2 - X_3 \geq 45 \dots \dots Y_3 \\ &X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

لإيجاد معامل (X<sub>3</sub>) في دالة الهدف (Z) المثلى

$$\bar{C}_3 = C_B B^{-1} P_j - C_3 = (-20, 0, 12) \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = -30 = 28 - 30 = -2 \leq 0$$

وعليه فإن الحل أمثل

إما فيما يخص عمود المتغير (X<sub>3</sub>) فإن قيمه تحسب كالآتي

قسم إدارة صناعية-بحوث العمليات إمكانيات وتقنيات: الفصل الثالث البرمجة الخطية  
(الثانية و تحليل الحساسية)

$$\bar{P}_3 = B^{-1}P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5/3 & 1 & -1/3 \\ -5/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

وبعدما يتم عملية تفرغ البيانات

(↓)	Basic	40	36	20	0	0	0	M	R.H.S.
C <sub>B</sub>		X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	R <sub>1</sub>	
40	X <sub>1</sub>	1	0	-2	0	1	0	0	8
0	S <sub>2</sub>	0	0	0	1/3	5/3	1	-1/3	25/3
36	X <sub>2</sub>	0	1	3	-1/3	-5/3	0	1/3	5/3
Z - Row		0	0	-2	-12	-20	0	12 - M	380

(2) : لو تم إضافة متغير جديد (X<sub>3</sub>) وبمعامل (40) في دالة الهدف وبمعامل (-3) للقيود الأول وبمعامل (1) للقيود الثاني وبمعامل (-1) للقيود الثالث. هل سيبقى الحل أمثلاً أم لا

الحل: بإضافة المعلومات او البيانات الجديدة للمتغير الجديد (X<sub>3</sub>) فان الانموذج سيكون بالشكل الاتي

$$\begin{aligned} & (\downarrow) \\ & Z = 40X_1 + 36X_2 + 40X_3 \\ \text{S.T.} \quad & X_1 + 2X_3 \leq 08 \dots\dots\dots Y_1 \\ & X_2 - 3X_3 \leq 12 \dots\dots\dots Y_2 \\ & 5X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 45 \dots\dots\dots Y_3 \\ & X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

لايجاد معامل (X<sub>3</sub>) في دالة الهدف (Z) المثلى

$$\bar{C}_3 = C_B B^{-1}P_j - C_3 = (-20, 0, 12) \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -40 = 48 - 40 = 8 \geq 0$$

وعليه فان الحل غير أمثل

إما فيما يخص عمود المتغير (X<sub>3</sub>) فان قيمه تحسب كالاتي

$$\bar{P}_3 = B^{-1}P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5/3 & 1 & -1/3 \\ -5/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -11/3 \\ 14/3 \end{pmatrix}$$

وبعدما يتم عملية تفرغ البيانات وكالاتي

قسم إدارة صناعية-بحوث العمليات إمكانيات وتقنيات: الفصل الثالث البرمجة الخطية  
(الثانية و تحليل الحساسية)

(↓)	Basic	R.H.S.	40	36	20	0	0	0	M
$C_B$			X1	X2	X3	S3	S1	S2	R1
40	X1	8	1	0	-2	0	1	0	0
0	S2	25/3	0	0	-11/3	1/3	5/3	1	-1/3
36	X2	5/3	0	1	14/3	-1/3	-5/3	0	1/3
Z – Row		380	0	0	8	-12	-20	0	12 - M

وعليه نكمل الحل باستخدام طريقة (PSM)