الفصل الأول: الاحتمالات وتطبيقاتها

Probabilities and its Applications

1–1 مقدمة

كلمة "احتمال" هي كلمة ينطق بها الكثير من الناس، فبعض خبراء الأرصاد الجوية يقولون من المحتمل سقوط أمطار اليوم، احتمال ارتفاع في درجات الحرارة، وبعض خبراء البورصة يقولون احتمال ارتفاع قيمة الأسهم المتداولة في سوق المال لشركة معينة، خلال هذا اليوم، واحتمال نجاح طالب، واحتمال إصابة نوع معين من الفاكهة بنوع من البكتريا، وهكذا، يكثر نطق الأفراد بها وربما يجهلون معناها. فماذا تعني كلمة احتمال؟

يقصد بهذه الكلمة فرصة حدوث أو وقوع حادثة معينة، وتستخدم الاحتمالات في كثير من النواحي التطبيقية، مثل المجالات الاقتصادية، والتجارية، والزراعية، والطبية، والسلوكية، وغيرها، خاصة عند اتخاذ القرار في دراسات الجدوى، والتنبؤ بسلوك الظواهر المختلفة، ولكي يمكن فهم موضوع الاحتمال، وأهميته في النواحي التطبيقية، نقوم بعرض بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمالات.

1–2 بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمال

- ***التجربة العشوائية* Randomized Experiment**

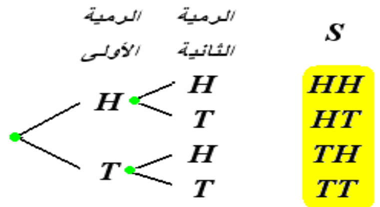
هي أي عملية تتم يمكن تحديد كل النتائج الممكنة لها، ولكن لا يمكن مسبقا تحديد النتيجة التي ستظهر أو تحدث، ومثال على ذلك عند إلقاء قطعة عملة معدنية مرة واحدة، فإن النتائج الممكنة لها نتيجتان هما: "ظهور الصورة" ويرمز لها بالرمز H، أو "ظهور الكتابة" ويرمز لها بالرمز T، أي أن النتائج الممكنة هي: { H , T }، وقبل إلقاء القطعة ، لا يمكن تحديد أي من النتيجتين سوف تظهر.

- ***فضاء العينة* Sample Space**

هي مجموعة النتائج الكلية للتجربة، ويرمز لها بالرمز S، ويرمز لعدد النتائج المكونة لفضاء العينة بالرمز $n(S)$ ، ومن الأمثلة على ذلك:

1– عند إلقاء قطعة عملة مرة واحدة، نجد أن فضاء العينة هو: S:{H , T } ، وعدد النتائج هي: $n(S)=2$.

2– عند إلقاء قطعة عملة مرتين (إلقاء قطعتين مرة واحدة)، فإن فضاء العينة يمكن الحصول عليه من خلال شجرة الاحتمالات كما يلي:



أي أن $n(S)=4$

3– عند رمي زهرة نرد (زار) مرة واحدة، فإن فضاء العينة هو مجموعة عدد النقاط التي تظهر على الوجه، وهي: S:{1, 2, 3, 4, 5, 6} ، أي أن : $n(S)=6$.

أعداد

أ.م.د. وقاص سعد خلف م.سرمد علوان صالح

4– عند رمي زهري نرد (زارين) مرة، فإن فضاء العينة هو مجموعة عدد النقاط التي تظهر على الوجهين، وهي:

S

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$n(S)=36$

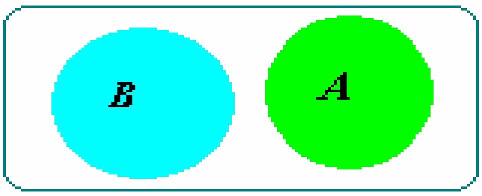
3-1 أنواع الحوادث Events

- **الحوادث ذات الفرص المتساوية Equally Likely Events**

إذا كانت النتائج الممكنة للتجربة العشوائية تمتلك فرصاً متساوية ولكل نقطة فيها نفس الفرصة بالظهور مثال ذلك رمي قطعة نقود فإن النتائج الممكنة هي (صورة H)، (كتابة T) فلكل منهما نفس الفرصة بالظهور أو عند حدوث ولادة جديدة في العائلة فإن فرصة أن يكون ولداً مساوية لفرصة أن تكون بنتاً.

- **الحوادث المتنافية Mutually Exclusive Events**

إذا كانت A، B حادثتين متنافيتين معرفتين على فضاء العينة S فإن حدوث A ينفي حدوث B أي أنهما لا يمكن أن يحدثا معاً في نفس المحاولة. فإذا رمينا قطعة نقود فإن نتيجة هذه المحاولة (هذه الرمية) ستكون إما صورة (H) أو كتابة (T) ولا يمكن ظهور الصورة والكتابة معاً في نفس الرمية أو المحاولة وكذلك إذا كان المنتج صالحاً لا يمكن أن يكون معيباً وإذا كان معيباً لا يمكن أن يكون صالحاً في إنتاج الوحدة الواحدة للماكنة. ورياضياً $A \cap B = \phi$ ، ويمكن تمثيلها بشكل " العالم فين كما في الشكل الاتي:



لا توجد نتائج مشتركة $(A \cap B) = \phi$

- **الحوادث المستقلة Independent Events**

وهي الحوادث التي لا يؤثر حدوث أحدها على الآخر أي أن ظروف حدوث الحادثة A لا علاقة له بظروف الحادثة B فتحديد كفاءة الموظف A لا علاقة له بتحديد كفاءة الموظف B العاملين في مؤسسة واحدة ولنفس نوع العمل. وعند إجراء اختبار لجودة الإنتاج بمنتج معين فإن مطابقة المنتج الأول للمواصفات لا يؤثر على مطابقة المنتج الثاني لمواصفات الجودة.

أعداد

م. سرمد علوان صالح　　　　أ.م.د. وقاص سعد خلف

- **الحوادث المكملة Compliment Event**

الحدث المكمل للحدث A هو الذي ينفي وقوعه، بمعنى آخر هو الحادث الذي يشمل كل نتائج التجربة باستثناء النتائج المكونة للحدث A، ويرمز للحادث المكمل بالرمز $\bar{A}$، ومن ثم نستنتج أن : $\left(A\cap\bar{A}\right)=\phi$, $\left(A\cup\bar{A}\right)=S$ كما هو مبين بالشكل التالي:

1-4 التباديل Permutation

المقصود بالتباديل لـ n من الأشياء هو تركيبها بكل الطرق الممكنة للترتيب ولو أن لنا r من الأشياء بحيث أن $r \prec n$ فإن وضع هذه الأشياء في ترتيب معين يسمى بالتباديل n من الأشياء مأخوذة لـ r في كل مرة لذا فإن تباديل r من الأشياء مأخوذة من n هو:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

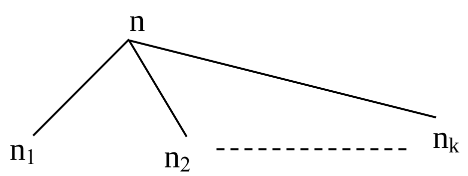
مثال (**1**): ما عدد التباديل الممكنة لحرفين من أربعة حروف هي A، B، C، D.

$$P_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

أي أن هناك (**12**) طريقة للترتيب وهي:

AB, AC, AD, BC, BD, CD, BA, CA, DA, CB, DB, DC

أما إذا كانت المجموعة n التي يراد ترتيبها وهي تحتوي على مجموعات متشابهة تماماً هي n_1 للمجموعة الأولى و n_2 لمجموعة الثانية و ... n_k للمجموعة k.



فإن عدد التباديل في هذه الحالة يساوي

$$\frac{n!}{n_1!n_2!.....n_k!}$$

مثال(**1**): كم كلمة يمكن تكوينه من احرف الكلمة REMEMBER

الحرف R	$n_1 = 2$
الحرف M	$n_2 = 2$
الحرف E	$n_3 = 3$
الحرف B	$n_4 = 1$
n=	8

أعداد

أ.م.د. وقاص سعد خلف   م. سرمد علوان صالح

فإذا أردنا جميع التراتيب الممكنة لهذه الحروف في هذه الكلمة أو تكوين كلمة تحتوي على هذه الحروف فإن عدد التراتيب الممكنة هي

$$\frac{8!}{2!\,2!\,3!\,1!}=1680$$

مثال(2): كم عدد يمكن تكوينه من الأرقام **2222، 33، 444**

$$\frac{9!}{3!\,2!\,4!}=1260$$

5-1 التوافيق Combination

التوافيق لـ r من الأشياء مأخوذة من n من الأشياء (بدون أخذ الترتيب بنظر الاعتبار أي أن السحب عشوائي لأن هذه الأشياء متشابهة تماماً من حيث الظاهرة المدروسة). ويعرف وفقاً للعلاقة

$$C_r^n=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{P!}{r!}$$

مثال (3): أراد أحد المديرين اختيار لجنة مشتريات مؤلفة من (3) موظفين وكان عدد المرشحين للجنة ثمانية موظفين، أوجد عدد اللجان التي يمكن تكوينها

الحل

$$C_3^8==\frac{8!}{3!(8-3)!}=56$$

مثال (4): تم الإعلان عن الحاجة لتعيين خمسة موظفين في أحد المؤسسات الحكومية وقد تقدم للتعيين (7) رجال و (5) نساء.

1. ما عدد الطرق التي يتم فيها اختيار الموظفين الخمسة.
2. ما عدد الطرق التي يتم فيها اختيار الموظفين الخمسة إذا كان المطلوب (3) رجال و (2) نساء.
3. ما عدد الطرق التي يمكن فيها اختيار الموظفين الخمسة بحيث يكون على الأقل رجل واحد فيما بينهم.

الحل

1. C_5^{12} =792
2. $C_3^7 C_2^5$ =35X10 =350
3. $C_1^7 C_4^5+C_2^7 C_3^5+C_3^7 C_2^5+C_4^7 C_1^5+C_5^7$ =35+210+350+172+ 21=791

مثال (5): يؤدي طالب امتحاناً وتحتوي ورقة الأسئلة الإمتحانية على (10) عشرة أسئلة وجب أن يجيب الطالب على (8) منها فقط.

1– ما عدد الطرق الممكنة للإجابة على الأسئلة.

2– ما عدد الطرق الممكنة للإجابة على الأسئلة أذا كانت الاسئلة الثلاثة الاولى اجبارية

3– ما عدد الطرق الممكنة للإجابة عن الأسئلة على أن يجيب في الأقل ثلاثة أسئلة من أول خمسة أسئلة.

4– ما عدد الطرق الممكنة للإجابة عن الأسئلة على أن يجيب على الأكثر أربعة من أول خمسة أسئلة.

الحل

1. أن يترك اثنين من الأسئلة C^{10}_2 او C^{10}_8 أن يختار ثمانية من الأسئلة

$$2.\quad C^3_3 C^7_5 = 21$$

$$3.\quad C^5_3 C^5_5 + C^5_4 C^5_4 + C^5_5 C^5_3 = 10 + 25 + 10 = 45$$

$$4.\quad C^5_4 C^5_4 + C^5_3 C^5_5 = 25 + 10 = 35$$

ملاحظة :

$$C^n_n = 1$$

$$C^n_0 = 1$$

$$C^n_1 = n$$

$$C^n_r = C^n_{n-r}$$

5–1 تعريف الاحتمال Probability Definition

يعتمد حساب الاحتمال من الناحية النظرية على أسس وقواعد الرياضيات، ويعد هذا النوع من الاحتمال هو العنصر الأساسي في الاستدلال الإحصائي، ولكن في المجال التجريبي تعتمد الاحتمالات على النتائج الفعلية لمشاهدات التجربة، وعلى تكرار الحادث محل الاهتمام، فإذا رمزنا لاحتمال وقوع الحادث A بالرمز $P(A)$ فان

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \; , \; 0 \le P(A) \le 1$$

إذ أن:

$n(S)$ يمثل عدد النتائج الكلية للتجربة،

$n(A)$ يمثل عدد النتائج الممكنة لوقوع الحادث A

مع ملاحظة أن قيمة الاحتمال تكون محصورة دائماً بين الصفر والواحد الصحيح وان الاحتمال المكمل لاحتمال حدوث الحادثة A المعرفة على فضاء العينة S يعرف بالشكل الاتي

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

مثال (**6**):في شعبة من شعب المؤسسة العامة للكهرباء (**6**) موظفين و (**7**) موظفات، قررت المؤسسة نقل (**4**) منهم لفتح شعبة جديدة وعرفت الحوادث كما يلي:

A: نقل (**2**) من الموظفين و (**2**) من الموظفات.

B: نقل (**4**) من الموظفين.

C: نقل (**4**) من الموظفات.

والمطلوب إيجاد احتمال كل حدث من الحوادث أعلاه:

الحل

$$1\text{- } P(A)=\frac{C_2^6 C_2^7}{C_4^{13}}=\frac{15\times 21}{715}=\frac{315}{715}$$

$$2\text{- } P(B)=\frac{C_4^6 C_0^7}{C_4^{13}}=\frac{15}{715}$$

$$3\text{- } P(C)=\frac{C_0^6 C_4^7}{C_4^{13}}=\frac{35}{715}$$

مثال (**7**): في الإنتاج اليومي لأحد المعامل كان (**3**) من المنتجات معيبة(غير جيدة) من بين (**8**) وحدة منتجة سحبت واحدة من المنتجات عشوائياً من الإنتاج اليومي للمعمل:

1.ما احتمال أن تكون معيبة.

2.ما احتمال أن تكون غير معيبة (جيدة).

الحل

لنعرف الحادثة A على أساس أنها تمثل الحصول على منتج معيب.

لنعرف الحادثة B على أساس أنها تمثل الحصول على منتج صالح (غير معيب).

لاحظ أن الحادثة B هي حادثة مكملة للحادثة A أي أن $B=\overline{A}$

$$1.\ P(A)=\frac{C_1^3}{C_1^8}=\frac{3}{8}$$

$$2.\ P(B)=\frac{C_1^5}{C_1^8}=\frac{5}{8}$$

$$P(A)+P(\overline{A})=\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=1$$

مثال(8): عند إلقاء أو رمي زهرة نرد غير متحيزة مرتين، فأوجد ما يلي:

1– احتمال ظهور وجهين متشابهين (ظهور نفس النتائج).

2– احتمال ان تكون القيمة المطلقة للفرق ما بين الوجهين (الزارين) تساوي **1**.

3– احتمال ان يكون حاصل ضرب الوجهين (الزارين) تساوي **6**.

4– احتمال ظهور وجهين مجموع نقاطهما **10**.(مجموع الوجهين يساوي **10**)

الحـــل:

نتائج فضاء العينة هي:

S

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$n(S)=36$

1– لنعرف أن الحادثة A هو حادث ظهور وجهين متشابهين، فإن:

A:{(1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6.6)}, n(A)=6

ويكون احتمال ظهور وجهين متشابهين هو:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

2– لنعرف أن الحادثة B هي القيمة المطلقة للفرق ما بين الوجهين (الزارين) تساوي **1**:

B:{(1,2) (2,1) (2,3)(3,2) (3,4) (4,3) (4,5) (5,4) (5,6) (6,5)}, n(B)=10

ويكون احتمال القيمة المطلقة للفرق ما بين الوجهين (الزارين) تساوي **1** هو :

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

3– لنعرف أن الحادثة C هي حاصل ضرب الوجهين (الزارين) تساوي **6**:

C:{(1,6) (6,1) (2,3)(3,2) }, n(C)=4

ويكون احتمال حاصل ضرب الوجهين (الزارين) تساوي **6** هو

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

4– لنعرف أن الحادثة D هو حادث ظهور وجهين مجموع نقاطهما ***10***

B:{(4,6) (5,5) (6,4)} , n(D)=3

، ويكون احتمال ظهور وجهين مجموع نقاطهما ***10*** هو

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

6-1 بعض قوانين الاحتمالات Probabilities Lows

1-6-1 قانون الجمع أو الاتحاد

أ. إذا كانت A ، B حادثتين معرفتين غير متنافيتين على فضاء العينة S فإن احتمال اتحاد الحادثة A مع الحادثة B يمثل احتمال حدوث الحادثة (A) + احتمال حدوث الحادثة (B) مطروحاً منهم احتمال تقاطع الحادثة A والحادثة B أي أن:

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$$

مثال(9): إذا كان نسبة المزارع التي تنتج خضروات 60% ، ونسبة المزارع التي تنتج فاكهه 75%، ونسبة المزارع التي تنتج الخضروات و الفاكهة 50%، أوجد الآتي:

1- ما احتمال أن مزرعة ما تنتج فاكهة أو خضروات؟

2- ما احتمال ألا تنتج المزرعة الفاكهة ؟

الحل:

لنعرف أن A حادث يعبر عن "المزرعة تنتج خضروات"، B هو حادث يعبر عن " المزرعة تنتج فاكهة"، $A \cap B$ حادث يعبر عن "المزرعة تنتج خضروات والفاكهة "، فإن:

$$P(A) = 0.6 \quad , \quad P(B) = 0.75 \quad , \quad P(A \cap B) = 0.5$$

ويكون:

1- احتمال أن مزرعة ما تنتج فاكهة أو خضروات هو:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= (0.6) + (0.75) - 0.5 = 0.85 \end{aligned}$$

2- احتمال ألا تنتج المزرعة الفاكهة هو:

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.75 = 0.25$$

مثال(10): من بين **100** طالب ، **45** نجح في امتحان مادة الاحصاء ، **30** نجح في امتحان مادة الرياضيات ، **25** نجح في امتحان مادة الادارة ،في حين ان الطلبة الذين نجحوا في مادتي الاحصاء و الرياضيات هم **14** طالب ، وان الطلبة الذين نجحوا في مادتي الرياضيات والادارة هم **10** طالب ، علماً ان الطلبة الذين نجحوا في مادتي الاحصاء و الادارة هم **08** طالب. إذ تم اختيار الطلاب للمواد بصوره عشوائية فما احتمال بان الطالب

1- ينجح في مادتي الاحصاء أو الرياضيات

2- ينجح في مادتي الاحصاء أو الادارة

الحل:

لنعرف أن A حادث يعبر عن "الطالب الذي نجح في مادة الاحصاء "

B حادث يعبر عن "الطالب الذي نجح في مادة الرياضيات"

C حادث يعبر عن "الطالب الذي نجح في مادة الادارة"

ويكون:

ان ينجح الطالب في مادتي الاحصاء أو الرياضيات

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=(0.45)+(0.30)-(0.14)=0.61$$

ان ينجح الطالب في مادتي الاحصاء أو الادارة

$$P(A\cup C)=P(A)+P(C)-P(A\cap C)$$
$$=(0.45)+(0.25)-(0.08)=0.62$$

ب. إذا كانت A ، B حادثتين معرفتين متنافيتين على فضاء العينة S فان

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$$

إذ أن في حالة الحوادث المتنافية

$$P(A\bigcap B)=0$$

مثال(11): قرر أحد مفتشي الضرائب زيارة أحد المعامل للتعرف على سجلاتهم اليومية في أحد أيام العمل لأحد الأسابيع ما هو احتمال أن تكون الزيارة في أحد الأيام الزوجية في الأسبوع (اليوم الثاني أو الرابع أو السادس).

$$P(2\bigcup 4\bigcup 6)=P(2)+P(4)+P(6)$$
$$P(2\bigcup 4\bigcup 6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

ج. إذا كانت A، B حادثتين مستقلتين معرفة على فضاء العينة S فإن احتمال اتحاد A، B هو

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$

لأنه في حالة الحوادث المستقلة

$$P(A\bigcap B)=P(A).P(B)$$

مثال (12) إذا كان احتمال أن يصيب اللاعب A الهدف هو (1/4) واحتمال أن يصيبه اللاعب B هو (1/3) ما هو احتمال:

1. أن اللاعب A واللاعب B يصيبا الهدف.
2. أن يصاب الهدف (أن يصيبه A أو B).
3. أن لا يصاب الهدف.

الحل

$$1\text{-}\ P(A\cap B)=P(A)*P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$$2\text{-}\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)*P(B))=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$$

$$3\text{-}\ P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

مثال (13) إذا رمينا قطعه نقدية ثلاث مرات في الهواء ، ولنعرف الحوادث الاتي

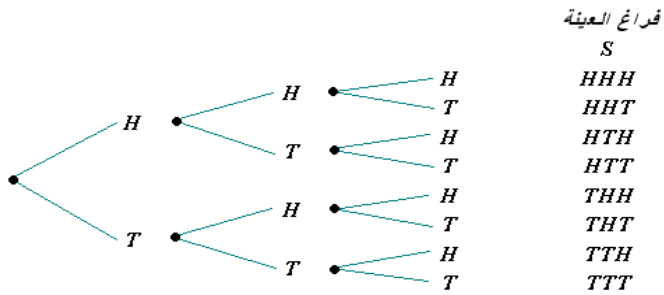
A: يمثل الرمية الاولى صوره

B: يمثل الرمية الثانية صورة

C: يمثل وقوع الصورة مرتين متتاليتين

فهل ان الاحداث A,B حدثان مستقلان أم B,C حدثان مستقلان

الحل: ان فضاء العينة يكون بالشكل الاتي



$$n(S)=8$$

وأما الأحداث هي:

$$A:\{HHH,HHT,HTH,HTT\},\ n(A)=4 \quad\Rightarrow P(A)=1/2$$
$$B:\{HHH,THT,HHT,THH\}\ ,n(B)=4 \quad\Rightarrow P(B)=1/2$$
$$C:\{HHT,THH\},\ \ n(C)=2 \quad\Rightarrow P(C)=1/4$$

وعليه فان

$$(A\cap B)=\{HHH,HHT\}\Rightarrow n(A\cap B)=2 \quad\Rightarrow P(A\cap B)=1/4$$
$$(B\cap C)=\{HHT,THH\}=C\Rightarrow n(B\cap C)=2 \quad\Rightarrow P(B\cap C)=1/4$$

ونستنتج بان

$$P(A\cap B)=P(A)*P(B)$$
$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}*\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

وعليه فان الاحداث A,B حدثان مستقلان

$$P(B\cap C)=P(B)*P(C)$$
$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}*\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}$$

وعليه فان الاحداث B,C حدثان غير مستقلان

1-6-2 قانون الاحتمال الشرطي

يستند هذا الاحتمال على فرصة وقوع حادث، إذا توافرت معلومات عن وقوع حادث آخر له علاقة بالحادث الأول، كاحتمال نجاح الطالب في مادة الإحصاء إذا علم أنه من الناجحين في مادة الاقتصاد، وكاحتمال استخدام المزرعة لنوع معين من السماد، إذا علم أنه يقوم بزراعة محصول معين، وكاحتمال أن الخريج يعمل بالقطاع الخاص، إذا علم أنه ممن تخرجوا من قسم معين من أقسام كلية الادارة، والأمثلة على ذلك كثيرة.

فإذا كان الحادث B حادث معلوم، والحادث A حادث آخر يراد حساب احتمال وقوعه، بمعلومية الحادث B ، فإن هذا الاحتمال يحسب بتطبيق المعادلة التالية:

علامة الشرط　　　　احتمال التقاطع

$$p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

الحادث المطلوب حساب احتماله　　　الحادث المعلوم　　　احتمال المعلوم

ويعرف الاحتمال $p(A|B)$ بقانون الاحتمال الشرطي، ويقرأ "احتمال وقوع الحادث A بمعلومية الحادث B"، أو يقرأ "احتمال وقوع الحادث A بشرط وقوع الحادث B"، يلاحظ أن الاحتمال الشرطي هو نسبة حادث التقاطع بين الحدثين إلى الحادث المعلوم

مثال(**14**) فيما يلي توزيع تكراري لعينة عشوائية حجمها 100 من خريجي الكلية في العامين الماضيين، حسب التخصص، ونوع المهنة:

المهنة / التخصص	قطاع عام	قطاع خاص	قطاع مختلط
بحوث العمليات	15	5	10
ادارة صناعية	8	17	10
محاسبة	12	10	13

فإذا اختير أحد الخريجين بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

1- ما احتمال أن يكون من خريجي قسم بحوث العمليات و يعمل بالقطاع الخاص.

2- ما احتمال أن يكون ممن يعملون بالقطاع العام أو من خريجي قسم ادارة صناعية.

3- ما احتمال أن يكون من خريجي قسم ادارة صناعية أو من قسم محاسبة.

4- إذا علم أن الفرد من خريجي قسم ادارة صناعية ، ما احتمال أن يكون ممن يعملون بالقطاع المختلط.

الحل:

أولا: نرمز لنوع المهنة بالرموز A، ولنوع التخصص بالرمز B ، كما هو مبين بالجدول التالي:

التخصص \ المهنة		قطاع عام A_1	قطاع خاص A_2	قطاع مختلط A_3	المجموع
بحوث العمليات	B_1	15	5	10	**30**
ادارة صناعية	B_2	8	17	10	**35**
محاسبة	B_3	12	10	13	**35**
المجموع		**35**	**32**	**33**	**100**

ثانيا: التكرار في كل خلية يعبر عن عدد الخريجين الذين ينتمون لقسم معين و يعملون في مهنة معينة، أي يعبر عن عدد تكرارات حوادث التقاطع الممكنة $A \cap B$.

1- حساب احتمال أن يكون من خريجي قسم بحوث العمليات و يعمل بالقطاع الخاص.

$$P(B_1 \cap A_2) = \frac{f(B_1 \cap A_2)}{n} = \frac{5}{100} = 0.05$$

2- حساب احتمال أن يكون ممن يعملون بالقطاع العام أو من خريجي قسم ادارة صناعية.

$$P(A_1 \cup B_2) = p(A_1) + P(B_2) - P(A_1 \cap B_2)$$
$$= \frac{35}{100} + \frac{35}{100} - \frac{8}{100} = \frac{62}{100} = 0.62$$

3- حساب احتمال أن يكون من خريجي قسم ادارة صناعية أو من قسم محاسبة.

هذان حادثان متنافيان، لأن تخرج الفرد من أحد الأقسام ينفي تخرجه من الأقسام الأخرى، وبمعنى آخر استحالة أن الفرد تخرج من قسمين في آن واحد، لذا يكون احتمال اتحادهما هو:

$$P(B_2 \cup B_3) = p(B_2) + P(B_3)$$
$$= \frac{35}{100} + \frac{35}{100} = \frac{70}{100} = 0.70$$

4- إذا علم أن الفرد من خريجي قسم ادارة صناعية ، ما احتمال أن يكون ممن يعملون بالقطاع المختلط.، هذا احتمال شرطي، المطلوب هنا " حساب احتمال أن الفرد ممن يعملون بالقطاع المختلط. A_3 بشرط أنه من خريجي قسم ادارة صناعية B_2، أي أن الاحتمال المطلوب هو:

$$p(A_3 \mid B_2) = \frac{p(A_3 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{\left(\frac{10}{100}\right)}{\left(\frac{35}{100}\right)} = \frac{10}{35}$$

مثال(**15**): قدم المدير المالي لشركة الهلال الصناعية دراسة جدوى اقتصادية لتطوير خط إنتاجي جديد وتوصلت الدراسة للنتائج التالية والتي تمثل توزيع الربح للمنتوج الجديد بافتراض R تمثل فضاء العينة للربح للمنتج الجديد في السنة الأولى

احتمال الحدوث	فضاء الربح للمنتج الجديد R
0.20	$A = \{R \geq 50\}$
0.30	$B = \{R : 40 \leq R < 50\}$
0.20	$C = \{R : 30 \leq R < 40\}$
0.10	$D = \{R : 20 \leq R < 30\}$
0.10	$E = \{R : 10 \leq R < 20\}$
0.05	$F = \{R : 0 \leq R < 10\}$
0.05	$G = \{R < 0\}$

في ضوء الدراسة المقدمة من قبل المدير المالي للشركة تم تطوير الخط الإنتاجي وطلب منه بمراقبة التقدم خلال سنة الإنتاج وبعد مضي ستة أشهر توصل إلى حقيقية أن الربح للمشروع الجديد المتحقق لا يقل عن **20** مليون دينار. وعلى هذا الأساس قدم المدير المالي مقترحاً جديداً لأن الجدول السابق لا يمكن تطبيقه وخاصة الحوادث G, F, E أصبحت غير ممكنة الحدوث.

الحل :

وعليه فإن مقترحه الجديد يعتمد على أن: $J = \{R \geq 20\}$

أي أن

$$J = A \cup B \cup C \cup D$$

وعليه فإن احتمال J سيكون

$$P(J) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$$
$$P(J) = 0.20 + 0.30 + 0.20 + 0.10 = 0.80$$

لأنها حوادث متنافية.

ويمكن تعديل النتائج كالآتي:

$$P(A \mid J) = \frac{P(A \cap J)}{P(J)} = \frac{P(A)}{P(J)} = \frac{0.20}{0.80} = 0.25$$

$$P(B \mid J) = \frac{P(B \cap J)}{P(J)} = \frac{P(B)}{P(J)} = \frac{0.30}{0.80} = 0.375$$

$$P(C \mid J) = \frac{P(C \cap J)}{P(J)} = \frac{P(C)}{P(J)} = \frac{0.20}{0.80} = 0.25$$

$$P(D \mid J) = \frac{P(D \cap J)}{P(J)} = \frac{P(D)}{P(J)} = \frac{0.10}{0.80} = 0.125$$

1-6-2 قانون ونظرية بيز

إذا كانت الحوادث A1، A2، .... An، حوادث معرفة على فضاء العينة S أذ أن

$$A_1 \cup A_2 \cup A_2 + \dots\dots\dots \cup A_n = S$$

أي أن الحوادث A1، .... An هي تجزيئات لفضاء العينة وتكون بمجموعها فضاء العينة.

لأي حادثة ولتكن B معرفة على نفس فضاء العينة S بحيث أن

$$B = S \cap B$$

أي أن B مجموعة جزئية من S فإن احتمال حدوث الحادثة B هو:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + ... + P(A_n)P(B|A_n)$$

وهذا ما يسمى بقانون Bayes

وإن حدوث الحدث Ai إذا كانت B قد وقعت فعلاً هو:

$$P(Ai|B) = \frac{P(Ai)P(B|Ai)}{P(A_1)P(B|A_1) + ...+ P(A_n)P(B|A_n)}$$

وهذه هي نظرية **Bayes**

مثال(**16**): A, B, C ثلاث شركات تنقل البضاعة من البصرة إلى بغداد، تنقل A (**50**%) من البضاعة وتنقل B (**20**%) وتنقل C (**30**%) منها فإذا كانت نسبة البضاعة التي تصل الى بغداد وتكون تالفة وللشركات الثلاثة على التوالي هي (**0.01**, **0.03**, **0.07**) فإذا وصلت البضاعة إلى بغداد واختيرت إحداها ما هو احتمال :

1. أن تكون تالفة.

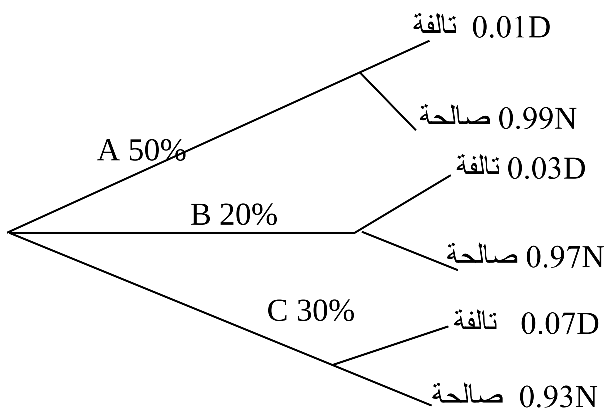
2. إذا كانت تالفة ما هو احتمال أن تكون منقولة من قبل الشركة B.

3. ان تكون صالحة.

4. إذا كانت صالحة ما هو احتمال أن تكون منقولة من قبل الشركة A.

D تالفة

N صالحة



$$1\text{-}\ P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C)$$

$$= (0.50)\ (0.01) + (0.20)\ (0.03) + (0.30)\ (0.07)$$

$$= 0.005 + 0.006 + 0.021 = 0.032$$

$$2-P(B|D)=\frac{P(B)P(D|B)}{P(D)}$$

$$=\frac{(0.20)(0.03)}{0.032}=0.1875$$

$$3-P(N)=P(A)P(N|A)+P(B)P(N|B)+P(C)P(N|C)$$

$$= (0.50)\ (0.99) + (0.20)\ (0.97) + (0.30)\ (0.93)$$
$$= 0.495 + 0.194 + 0.279$$
$$= 0.968$$

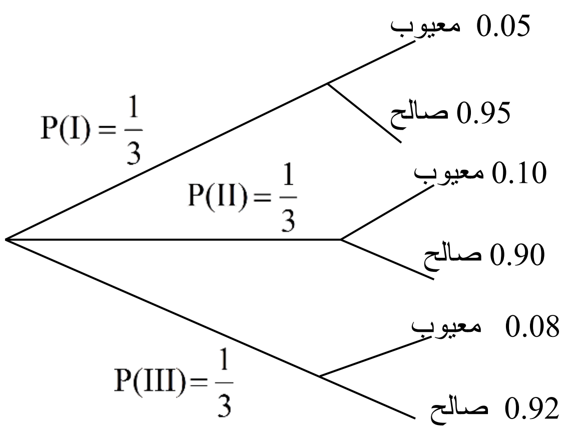
$$4-P(A|N)=\frac{P(A)P(N|A)}{P(N)}$$

$$=\frac{(0.50)(0.99)}{0.968}=0.5113$$

مثال(17):ثلاث ماكنات تنتج جميع الوحدات وبنسب متساوية وجد أن الماكنة الأولى تنتج إنتاجاً معيباً بنسبة 5% والثانية بنسبة 10% والثالثة بنسبة 8% اختيرت وحدة واحدة من الإنتاج، ما هو احتمال أن:

1. أن تكون معيوبة D
2. أن تكون صالحة G
3. إذا كانت معيبة ما هو احتمال أن الماكنة الثالثة هي التي أنتجتها.
4. إذا كانت صالحة ما هو احتمال أن الماكنة الثانية هي التي أنتجتها.

الحل



$$1-P(D)=P(I)P(D|I)+P(II)P(D|II)+P(III)P(D|III)$$

$$=\frac{1}{3}(0.05)+\frac{1}{3}(0.10)+\frac{1}{3}(0.08)$$
$$= 0.076$$

$$2-P(G)=P(I)P(G|I)+P(II)P(G|II)+P(III)P(G|III)$$

$$=\frac{1}{3}(0.95)+\frac{1}{3}(0.90)+\frac{1}{3}(0.92)$$
$$= 0.923$$

$$3\text{-}P(III|D)=\frac{P(III)P(D|III)}{P(D)}=\frac{\frac{1}{3}(0.08)}{0.076}=0.35$$

$$4\text{-}P(II|G)=\frac{P(II)P(G|II)}{P(G)}=\frac{\frac{1}{3}(0.90)}{0.923}=0.325$$

7-1 المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

Random Variables and Probability Distributions

المتغير العشوائي هو الذي يأخذ قيما حقيقية مختلفة تعبر عن نتائج فراغ العينة، ومن ثم مجال هذا المتغير، يشمل كل القيم الممكنة له، ويكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين، وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

1-7-1 المتغيرات العشوائية المتقطعة Discrete Random Variables

المتغير العشوائي المنفصل هو الذي يأخذ قيم بينية، ومتباعدة، ويرمز للمتغير العشوائي بشكل عام بحرف من الحروف الأبجدية الكبيرة $X, Y, Z, ...$ ويرمز للقيم التي يأخذها المتغير بالحروف الأبجدية الصغيرة $x, y, z, ...$، ومن أمثلة هذه المتغيرات:

1- عدد الأولاد الذكور في الأسرة المكونة من أربع أولاد X، $X:\{x=0,1,2,3,4\}$.
2- عدد الزبائن الذين يتم إنهاء خدمتهم البنكية كل 10 دقائق Y، $Y:\{y=0,1,2,3,....\}$.
3- عدد الوحدات التالفة من إنتاج مزرعة معينة تنتج 200 وحدة كل موسم.
4- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر.

فإذا كان المتغير العشوائي المنفصل X يأخذ القيم $X:\{x=x_1,x_2,...,x_n\}$ ، وكان $P(X=x_i)=f(x_i)$ هو احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ القيمة x_i ، فإنه، يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X، وهو جدول مكون من عمودين، الأول به القيم الممكنة للمتغير $X:\{x=x_1,x_2,...,x_n\}$ ، والثاني به القيم الاحتمالية لهذا المتغير $P(X=x_i)=f(x_i)$ ، وكما موضح في الجدول ادناه :

x_i	$f(x_i)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$
Σ	1

جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل

وتسمى الدالة $f(x_i)$ بدالة الكتلة الاحتمالية ، ومن خصائص هذه الدالة ما يلي:

أ- إن كل قيمة من قيم دالة الكتلة الاحتمالية تقع بين الصفر والواحد الصحيح
$$0 \le f(x_i) \le 1$$

ب- إن مجموع الاحتمالات المقابلة لكل قيم المتغير العشوائي المنفصل مساوٍ إلى الواحد الصحيح أي أن: $\sum_{\forall x} f(x_i) = 1$

تعريف

تعرف الدالة التجميعية للمتغير العشوائي c. d. f. الدالة التجميعية للمتغير العشوائي المنفصل بالشكل بالآتي:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{\text{اقل قيمة الى } x}^{X} f(x)$$

تعريف:

إذا كانت X_1، X_2، ...... X_n، تمثل قيم المتغير العشوائي X وكانت $P(x_1)$ ، $P(x_2)$ ، ... ... ، $P(x_n)$، تمثل الاحتمال المقابل لكل قيمة من قيم X فإن التوقع الرياضي الفردي يمثل متوسط قيم المتغير X ويمكن تعريفه بأنه مجموع حاصل ضرب قيم X في الاحتمالات المقابلة لها.

$$E(X) = x_1P(x_1) + x_2P(x_2) + \dots + x_nP(x_n)$$

أما التباين فإنه يعرف كالآتي:

$$\sigma_x^2 = V(X) = EX^2 - (EX)^2$$

مثال (18): إذا كان من المعلوم أن نسبة مبيعات أحد المراكز التجارية من التفاح الأمريكي 0.60 ، بينما يكون نسبة مبيعاته من الأنواع الأخرى للتفاح 0.40، اشترى أحد الزبائن صندوقين، والمطلوب:

1- كون فضاء العينة.

2- إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الصناديق المشتراة من التفاح الأمريكي، فأوجد الآتي:

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .
- ارسم دالة الاحتمال لهذا المتغير.
- كون التوزيع الاحتمالي التجميعي.
- ما هو احتمال $P(X = 1)$ ، $P(X \le 1)$ ، $P(X = 1.5)$ ، $P(X \le 1.5)$
- الوسط الحسابي والتباين لعدد الصناديق المشتراة من النوع الأمريكي.
- اذا كان لدينا (200) من صناديق التفاح المشتراة ، فما هو عدد الصناديق المتوقع شرائها على ان لا يقل عن عبوتين خلال شهر

الحل:

تكوين فضاء العينة: التجربة هنا هو شراء وحدتين من صناديق التفاح، ومن ثم فراغ العينة يتكون من أربع نتائج، هي:

- التوزيع الاحتمالي لعدد الصناديق المشتراة من التفاح الأمريكي X

من المعلوم أن الزبون اشترى عبوتين، وأن المتغير العشوائي هو عدد الصناديق المشتراة من التفاح الأمريكي، لذا تكون القيم الممكنة للمتغير العشوائي هي:

$x=0$ إذا كانت العبوتين من النوع الآخر، أي إذا كانت نتيجة التجربة (آخر، آخر)

$x=1$ إذا كان أحد العبوتين من النوع الأمريكي، أي إذا كانت نتيجة التجربة (آخر, أمريكي) أو (أمريكي, آخر)

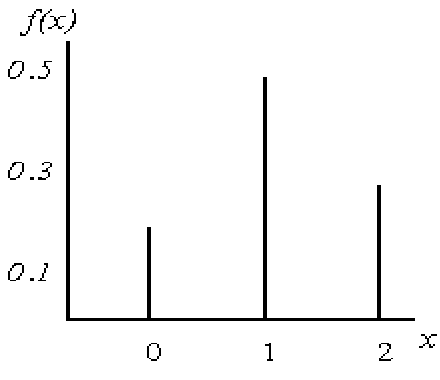
$x=2$ إذا كانت العبوتين من النوع الأمريكي، أي إذا كانت نتيجة التجربة (أمريكي, أمريكي)

ومن ثم يأخذ المتغير القيم: $X:\{x=0,1,2\}$ ، ويرتبط احتمالات هذه القيم باحتمالات نتائج التجربة المناظرة لها كما هو مبين أعلاه، ومن ثم يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو:

x_i	$f(x_i)$
0	0.16
1	0.48
2	0.36
Σ	1

جدول التوزيع الاحتمالي لعدد الصناديق المشتراة من التفاح الأمريكي

- رسم دالة الاحتمال $f(x)$:



- تكوين التوزيع الاحتمالي التجميعي:

يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي التجميعي لعدد الوحدات المشتراة من التفاح الأمريكي كما يلي:

x_i	$f(x_i)$	$F(x_i)$
0	0.16	$F(0)=P(X\le 0)=0.16$
1	0.48	$F(1)=P(X\le 1)=0.16+0.48=0.64$
2	0.36	$F(2)=P(X\le 2)=0.64+0.36=1.00$
Sum	1	

جدول التوزيع الاحتمالي، والتوزيع التجميعي لعدد الصناديق المشتراة من التفاح الأمريكي

- حساب الاحتمالات:– $P(X=1)$ ، $P(X\le 1)$ ، $P(X=1.5)$ ، $P(X\le 1.5)$

$$P(X=1)=f(1)=0.48$$
$$P(X\le 1)=F(1)=0.64$$
$$P(X=1.5)=f(1.5)=0$$
$$P(X\le 1.5)=F(1.5)=F(1)=0.64$$

- لحساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري يتطلب تكوين جدول يشمل المجاميع التالية: x_i^2 , $\sum x_i^2\ f(x_i)$, $\sum x_i\ f(x_i)$ ، وذلك كما يلي:

x_i	x_i^2	$f(x_i)$	$x_i f(x_i)$	$x_i^2 f(x_i)$
0	0	0.16	0	0
1	1	0.48	0.48	0.48
2	4	0.36	0.72	1.44
Sum		1	1.20	1.92

إذا الوسط الحسابي هو: $\mu=\sum x_i\ f(x_i)=1.20$

والتباين وهو: $\sigma^2=\sum x_i^2\ f(x_i)-\mu^2=1.92-(1.20)^2=0.48$

- اذا كان لدينا (200) من صناديق التفاح المشتراة ، فما هو عدد الصناديق المتوقع شرائها على ان يقل عن عبوتين خلال شهر

$$No.of\ Package=200*P(X\le 1)=200*F(1)=200(0.16+0.48)=200(0.64)=128$$

مثال (19): فيما يلي التوزيع الاحتمالي لعدد الوحدات التي تستهلكها شركة الاطياف لمستحضرات التجميل والعطور من أحد مساحيق النظافة خلال الشهر X ،

$$f(x_i)=\frac{x_i+c}{18}\qquad x_i=1,2,3,4$$

والمطلوب:

1– أوجد الثابت **c**

2– احسب الوسط والانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.

3– كون جدول التوزيع التجميعي $F(x)$ ثم أوجد الآتي:

أ– نسبة الأسر التي يقل استهلاكها عن وحدتين

ب– نسبة الأسر التي يزيد استهلاكها عن 3 وحدات

الحل:

1-

$$\Rightarrow \sum_{1}^{4} f(x_i)=1 \Rightarrow \sum_{1}^{4} \frac{x_i+c}{18}=1$$
$$\Rightarrow \frac{1+c}{18}+\frac{2+c}{18}+\frac{3+c}{18}+\frac{4+c}{18}=1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{18}[10+4c]=1$$
$$\Rightarrow 4c=8 \Rightarrow c=2$$

2-

x_i	x_i^2	$f(x_i)$	$x_i f(x_i)$	$x_i^2 f(x_i)$
1	1	3/18	3/18	3/18
2	4	4/18	8/18	16/18
3	9	5/18	15/18	45/18
4	16	6/18	24/18	96/18
Sum		1	50/18	160/18

إذا الوسط الحسابي هو: $\mu=\sum x_i \; f(x_i)=50/18$

والتباين وهو: $\sigma^2=\sum x_i^2 \; f(x_i)-\mu^2=\frac{160}{18}-\left(\frac{50}{18}\right)^2=\frac{95}{81}$

3-

x_i	$f(x_i)$	$F(x_i)$
1	3/18	$F(1)=P(X\le 1)=3/18$
2	4/18	$F(2)=P(X\le 2)=3/18+4/18=7/18$
3	5/18	$F(3)=P(X\le 3)=7/18+5/18=12/18$
4	6/18	$F(4)=P(X\le 4)=12/18+6/18=1$

$$P(X<2)=P(X\le 1)=F(1)=3/18$$
$$P(X>3)=P(X\ge 4)=1-P(X\le 3)=1-F(3)=1-(12/18)=6/18=f(X=4)$$

2-7-1 التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الخاصة

في كثير من النواحي التطبيقية، تتبع بعض الظواهر توزيعات احتمالية خاصة، وهي التوزيعات التي يمكن حساب احتمالات قيم المتغير عن طريق معادلة رياضية، تسمى بدالة الاحتمال $f(x)$ ، وهذه المعادلة لها معالم معينة، تسمى بمعالم المجتمع الذي ينسب له هذا التوزيع، وهذه المعالم ما هي إلا حقائق ثابتة مجهولة، وهي الأساس في حساب القيم الاحتمالية للتوزيع الاحتمالي للمجتمع محل الدراسة. ومن أهم التوزيعات التي سيتم دراستها في هذا المقرر، توزيع ثنائي الحدين، والتوزيع البواسوني.

أ– توزيع ثنائي الحدين The Binomial Distribution

إذا تكررت محاولة n من المرات، بحيث أن كل محاولة لها نتيجتان فقط متنافيتان هما:

- النتيجة محل الاهتمام " حالة نجاح " وتتم باحتمال ثابت في كل محاولة هو p
- النتيجة الأخرى " حالة فشل " وتتم باحتمال ثابت أيضا هو $q=1-p$

وبافتراض أن هذه المحاولات مستقلة، بمعنى أن نتيجة كل محاولة ليس لها علاقة بنتيجة المحاولة الأخرى، وإذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن عدد حالات النجاح "عدد النتائج محل الاهتمام" في الـ n محاولة، فإن مدي المتغير العشوائي X والذي يعبر عن عدد حالات النجاح هو: $X:\{x=0,1,2,\ldots,n\}$ ، ومن ثم يحسب الاحتمال $P(X=x)=f(x)$ بتطبيق المعادلة التالية:

$$\boxed{f(x)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}\quad,\quad x=0,1,2,\ldots n}$$

إذ أن $\binom{n}{x}$ هي عدد طرق اختيار x من n وكما ذكر سابقاً:

وان متوسط عدد حالات النجاح الذي يمثل القيمة المتوقعة لحالة النجاح هو:

$$\boxed{\mu=\sum x\ f(x)=np}$$

وبتباين قدره

$$\boxed{\sigma^2=npq}$$

مثال(**20**): تقدم (**10**) أشخاص لإشغال وظيفة (وكان احتمال تعيين أحدهم مساو إلى احتمال عدم تعيينه)

ما هو احتمال:

1–تعيين (**4**) منهم فقط.

2–ما احتمال عدم تعيين أي منهم.

3–ما احتمال تعيين على الأقل اثنان منهم.

4–ما احتمال تعيين على الأكثر أثنان فقط.

الحل

$$P=\frac{1}{2}\qquad x=0,1,2\ldots\ldots,10$$

$$q=1-p=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$n=10$$

فتكون الدالة الاحتمالية كالاتي

$$f(x)=C_x^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{10-x}\quad x=0,1,2,\ldots\ldots,10$$

1.احتمال تعيين 4 منهم

$$P(X=4)=C_4^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{10-4}=0.205$$

2. احتمال عدم تعيين أي منهم

$$P(X=0)=C_0^{10}(\frac{1}{2})^0(\frac{1}{2})^{10-0}=0.00097$$

3. احتمال تعيين على الاقل اثنين منهم

$$P(X\geq 2)=P(x=2)+P(X=3)+......P(X=10)$$

$$=C_2^{10}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^{10-2}......+C_{10}^{10}(\frac{1}{2})^{10}(\frac{1}{2})^{10-10}=0.989$$

or

$$p(x\geq 2)=1-p(x<2)=1-\{p(x=0)+p(x=1)\}=0.989$$

4. احتمال تعيين على الاكثر اثنين منهم

$$p(x\leq 2)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)$$

$$=C_0^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{10-10}+C_1^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{10-1}+C_2^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{10-2}=0.0546$$

مثال (21): إذا كانت نسبة إنتاج سلعة معيوبة هي 1 لكل 7 وحدات منتجة فإذا تم إنتاج (15) وحدة ما هو احتمال:

1. وجود 3 سلع معيبة.
2. عدم وجود سلعة معيبة واحدة.
3. على الأقل سلعة واحدة معيوبة.
4. متوسط عدد الوحدات المعيبة في الإنتاج والتباين في العيوب.

الحل

$$n=15 \qquad p=\frac{1}{7} \qquad q=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$

$$1\text{-}\ p(X=3)=C_3^{15}\left(\frac{1}{7}\right)^3\left(\frac{6}{7}\right)^{15-3}=0.03477$$

$$2\text{-}\ p(X=0)=C_0^{15}\left(\frac{1}{7}\right)^0\left(\frac{6}{7}\right)^{15-0}=0.099$$

$$3\text{-}\ p(X\geq 1)=1-p(X\leq 1)=1-p(X=0)$$

$$=1-C_0^{15}\left(\frac{1}{7}\right)^0\left(\frac{6}{7}\right)^{15-0}$$

$$=1-0.099=0.9$$

$$4\text{-}\ E(X)=\mu=n.p=15\left(\frac{1}{7}\right)=2.142$$

$$V(X)=\sigma_x^2=n.p.q=15\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{6}{7}\right)=1.8367$$

ب- التوزيع البواسوني Poisson Distribution

يكثر استخدام هذا التوزيع في الحالات التي تقع فيها الأحداث وفقا لمعدلات زمنية، وكذلك في حالة الأحداث نادرة الوقوع، ومن أمثلة ذلك:

- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر. $X:\{x=0,1,2,...\}$
- عدد مرات سقي نوع معين من المحاصيل الزراعية خلال الموسم. $X:\{x=0,1,2,...\}$
- عدد الزبائن الذين يتم خدمتهم البنكية كل 10 دقائق. $X:\{x=0,1,2,...\}$
- عدد مرات زيارة المريض للطبيب كل سنة. $X:\{x=0,1,2,...\}$
- عدد مرات تناول الأسرة للحوم الحمراء خلال الأسبوع. $X:\{x=0,1,2,...\}$
- عدد أخطاء الطباعة لكل صفحة من صفحات الكتاب. $X:\{x=0,1,2,...\}$

إذا كان متوسط عدد مرات وقوع حادث وفقا لمعدل زمني معين هو $\mu=n*p$، وكان المتغير العشوائي X يعبر عن عدد مرات وقوع الحادث وفقا لهذا المعدل، فإن مدي المتغير العشوائي X هو: $X:\{x=0,1,2,...\}$، وهذا المدى عبارة عن فئة مفتوحة من اليمين، فإن الاحتمال $P(X=x)=f(x)$ والذي يعبر عن احتمال وقوع الحادث عدد x من المرات وفقا لهذا المعدل، يحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$\boxed{f(x)=\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}\quad,\quad x=0,1,2,...}$$

حيث أن e هي أساس اللوغاريتم الطبيعي، وتوجد في بعض الآلات الحاسبة، وقيمتها هي: $e=2.718$ تقريبا، ويمكن حساب قيمتها باستخدام الآلة الحاسبة باتباع الخطوات التالية من الشمال إلى اليمين:

مثلاً إيجاد $e^{-1.5}$

SHIFT e^x (-) 1.5 (=) 0.22323016 — النتيجة

وأما $x!$ فتسمى "مضروب العدد x " ويساوي: $x!=x(x-1)(x-2)...3\times2\times1$ وإن الوسط الحسابي لتوزيع بواسون والتباين كالاتي:-

$$E(X)=\mu=\sigma^2$$

مثال (22): إذا كان نسبة المعيب في المواد المنقولة من قبل أحدى الشركات هو 4% فإذا نقلت هذه الشركة (200) وحدة ما هو احتمال إن فيها:

1. أكثر من (3) وحدات معيبة.
2. على الأقل واحدة معيبة.
3. احسب متوسط المعيب والتباين.

الحل

$$p = \frac{4}{100} \qquad n = 200$$

$$\mu = n * p = 200\left(\frac{4}{100}\right) = 8$$

1) $p(x>3) = 1 - p(x \le 3)$

$$= 1 - \{p(x=0) + p(x=1) + p(x=2) + p(x=3)\}$$

$$= 1 - \left\{\frac{e^{-8}8^0}{0!} + \frac{e^{-8}8^1}{1!} + \frac{e^{-8}8^2}{2!} + \frac{e^{-8}8^3}{3!}\right\}$$

$$= 1 - \{0.000335 + 0.00268 + 0.010734 + 0.0286\}$$

$$= 1 - \{0.04237\} = 0.957$$

$$2)\ p(x \ge 1) = 1 - p(p(x \le 1)) = 1 - p(x=0)$$

$$= 1 - 0.000335 = 0.9996$$

$$3)\ \mu = E(X) = \sigma^2 = 8$$

مثال (23): لاحظ مدير أحد المصارف بأن هناك فترتين لذروة الطلب على عمليات الإيداع أثناء كل أسبوع. الأولى هي يوم السبت حيث يبلغ معدل الأخطاء 3 باليوم. ويوم الأربعاء ويبلغ معدل الأخطاء 4 باليوم. اجب عما يلي:

أ. ما هو احتمال عدم وجود أخطاء في عمليات الإيداع ليوم السبت؟

ب. ما هو احتمال ارتكاب خطأين في عمليات الإيداع ليوم الأربعاء؟

ج. ما هو احتمال ارتكاب أربعة أخطاء أو أكثر خلال يوم السبت؟

د. هو احتمال عدم ارتكاب أخطاء يومي السبت والأربعاء؟

الحل

$\lambda = 3$ ليوم السبت

$\lambda = 4$ ليوم الأربعاء

وعليه تكون دالة الكتلة الاحتمالية كالآتي:

$$f(X) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!} \qquad X = 0, !, \ldots$$

أ. احتمال عدم وجود أخطاء في عمليات الإيداع ليوم السبت هي:

$$P_1(0)=\frac{3^0e^{-3}}{0!}=0.0497$$

ب. احتمال ارتكاب خطأين في عمليات الإيداع ليوم الأربعاء هي:

$$P(2)=\frac{4^2e^{-4}}{2!}=0.1465$$

ج. احتمال ارتكاب أربعة أخطاء أو أكثر يوم السبت يعني مطروح منه احتمال ثلاث أخطاء أو اقل.

$$P(X\geq 4)=1-P(X\leq 3)$$

$$=1-[P(0)+P(1)+P(2)+P(3)]$$

$$P(0)=\frac{3^0e^{-3}}{0!}=0.0497$$

$$P(1)=\frac{3^1e^{-3}}{1!}=0.1493$$

$$P(2)=\frac{3^2e^{-3}}{2!}=0.2240$$

$$P(3)=\frac{3^3e^{-3}}{3!}=0.2240$$

$$p(X\geq 4)=1-(.0497+.1493+.2240+.2240)=0.353$$

د. احتمال عدم ارتكاب خطأ يومي السبت والأربعاء يعني: $P_1(0)\cap P_2(0)$

من فرع (أ) يوم السبت $P_1(0)=0.0497$

ليوم الأربعاء $P_2(0)=\frac{4^4e^{-4}}{0!}=0.0183$

وباستخدام القاعدة التالية: $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ نحصل على

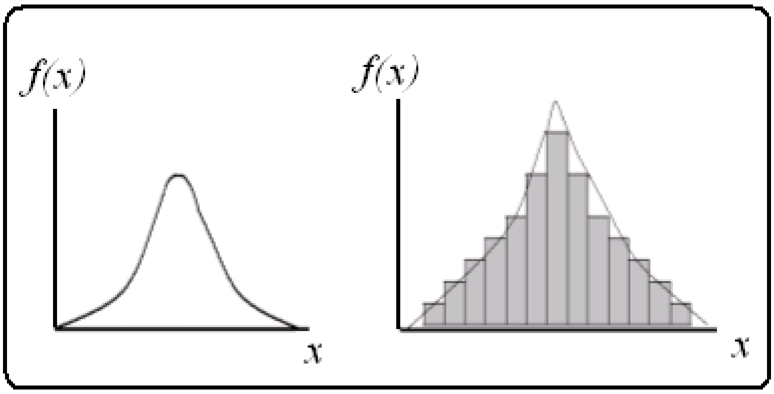
$$P(A\cap B)=P(A).P(B)=P_1(0)\cap P_2(0)=(0.0497)(0.0183)=0.0009$$

3-7-1 المتغيرات العشوائية المستمرة Continuous Random Variables

المتغير العشوائي المستمر، هو الذي يأخذ قيما متصلة، ويأخذ عدد لانهائي من القيم الممكنة له داخل مجاله، فإذا كان X متغير عشوائي مستمر، ويقع في المدى (a,b)، أي أن: $\{X = x : a < x < b\}$، فإن للمتغير X عدد لانهائي من القيم تقع بين الحدين الأدنى والأعلى (a,b)، ومن الأمثلة على المتغيرات الكمية المستمرة ما يلي:

- كمية الألبان التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر: $\{X = x : 10 < x < 40\}$
- المساحة المنزرعة بالأعلاف بالألف هكتار $\{X = x : 1000 < x < 15000\}$
- فترة صلاحية حفظ الدجاج المبرد بالأيام، $\{X = x : 1 < x < 5\}$
- وزن الجسم بالكيلوجرام للأعمار من $(40\text{-}30)$، $\{X = x : 55 < x < 80\}$

عند تمثيل بيانات المتغير الكمي المستمر في شكل مدرج تكراري النسبي، نجد أن شكل هذا المدرج هو أقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر، وكلما ضاقت الفترات بين مراكز الفئات، يمكن الحصول على رسم دقيق للمنحنى الخاص بدالة احتمال المتغير المستمر، كما هو مبين بالشكل الاتي



شكل منحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر

والمساحة أسفل المنحنى تعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية، ولذا تساوي هذه المساحة الواحد الصحيح، وتسمى الدالة $f(x)$ بدالة كثافة الاحتمال $(p.d.f)$ Probability Distribution Function ، وبفرض المتغير العشوائي المستمر يقع في المدى: $X = \{x : a \prec x \prec b\}$ ، وأن منحنى هذه الدالة يأخذ الصورة التالية:

فإن من خصائص دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ما يلي

1- الدالة $f(x)$ موجبة داخل المدى (a,b) أي أن: $f(x) \succ 0$ ، $x \in (a,b)$

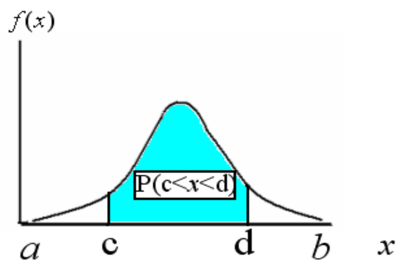
2- التكامل على حدود المتغير من الحد الأدنى a حتى الحد الأعلى b يعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية، لذا يساوي الواحد الصحيح ، أي أن:

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(x)\ dx = 1}$$

إذ أن الشكل الرياضي أعلاه يسمى بالتكامل المحدد من $x = a$ حتى $x = b$ ، وهذا يعني إيجاد

المساحة أسفل المنحني بين (a,b).

3- لحساب احتمال أن المتغير العشوائي المستمر يقع في المدى (d,c) أي حساب الاحتمال $p(c<x<d)$، يجب حساب المساحة أسفل المنحني من $x=c$ حتى $x=d$ كما هي مبينة في الشكل البياني التالي:



ويتم ذلك بإيجاد التكامل المحدد في هذا المدى، كما يلي:

$$\boxed{p(c<x<d)=\int_{x=c}^{x=d} f(x)\,dx=[g(x)]_c^d=g(d)-g(c)}$$

4- في المتغير المستمر، يكون الاحتمال $p(x=value)$ مساويا للصفر، أي أن:

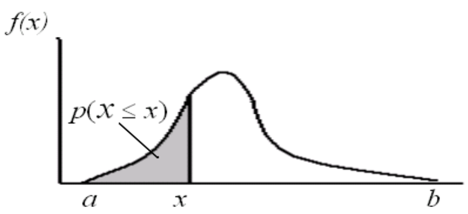
$$\boxed{p(x=value)=0}$$

تعريف

تعرف الدالة التجميعية للمتغير العشوائي c. d. f. الدالة التجميعية للمتغير العشوائي المنفصل بالشكل بالآتي:

$$\boxed{C.D.F=F(x)=P(X\le x)=\int_a^x f(x)dx}$$

ويمكن توضيحها بيانيا بالرسم التالي:



تعريف:

إذا كانت $f(x)$ هي دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي x، $a<x<b$ فإن التوقع الرياضي للدالة $h(x)$ تأخذ الصورة التالية:

$$\boxed{E(h(x))=\int_a^b h(x)\,dx}$$

ومن ثم يمكن كتابة معادلة الوسط والتباين كما يلي.

أعداد
م. سرمد علوان صالح أ.م.د. وقاص سعد خلف

$$\mu = E(x) = \int_a^b x f(x) dx$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - u^2 \ , \ E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x) \ dx$$

مثال (23): إذا كان الإنفاق الشهري للأسرة بمئات ألاف الدنانير على المواد الغذائية له دالة كثافة احتمال تأخذ الصورة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} cx(10-x) \ , & 0 < x < 10 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

والمطلوب:

1- حساب قيمة الثابت c

2- احسب احتمال أن إنفاق الأسرة يتراوح ما بين (8,5) مائة ألف دينار خلال الشهر.

3- إذا كان لدينا 600 أسرة، فما هو عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن 3 مائة آلاف خلال الشهر؟

4- الوسط الحسابي

5- التباين

6- كون التوزيع الاحتمالي التجميعي

7- حساب احتمال أن إنفاق الأسرة يقل عن 5 مائة آلف دينار. مستفيداً من دالة التوزيع التجميعي

الحل

1- حساب قيمة c : من خصائص دالة كثافة الاحتمال:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) \ dx = 1$$

وعليه فان

$$\int_{x=0}^{x=10} cx(10-x) \ dx = c \int_{x=0}^{x=10} (10x - x^2) \ dx = c\left[10\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^3}{3}\right]_0^{10}$$

$$= c\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = c\left[(5(100) - \frac{(1000)}{3})\right] - 0$$

$$= \frac{500}{3} c = 1$$

$$c = 3/500 = 0.006$$

2- حساب أن إنفاق الأسرة يتراوح بين (8,5) مائة ألف دينار خلال الشهر هو.

$$p(5<x<8)=\int_{x=5}^{x=8}0.006x(10-x)\ dx=0.006\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_5^8$$

$$p(5<x<8)=0.006\left[\left(5(8)^2-\frac{8^3}{3}\right)-\left(5(5)^2-\frac{5^3}{3}\right)\right]=0.006[(149.3333)-(83.3333)]$$

$$p(5<x<8)=0.006(66)=0.396$$

3– إذا كان لدينا 600 أسرة، فإن عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن 3 مائة آلف خلال الشهر هو:

$$number\ of\ \ family=600\ \ p(x<3)$$

$$=600\int_0^3 0.006x(10-x)dx$$

$$=3.6\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=3.6[45-9]-0=129.6\approx 130$$

أي تقريباً 130 أسرة.

4– الوسط الحسابي

$$\mu=E(x)=xf(x)dx=\int_0^{10}x(0.006x(10-x))=0.006\int_0^{10}(10x^2-x^3)dx$$

$$=0.006\left[10\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{10}=0.006\left[\left(\frac{10000}{3}-\frac{10000}{4}\right)-(0)\right]$$

$$=60\left[\frac{1}{12}\right]=5$$

متوسط إنفاق الأسرة الشهري 5 مائة آلف .

5– الانحراف المعياري

$$\sigma^2=E(x^2)-\mu^2=E(x^2)-(5)^2$$

وأن

$$E(x^2)=\int_a^b x^2f(x)\ \ dx=0.006\int_0^{10}(10x^3-x^4)dx$$

$$E(x^2)=0.006\left[10\left(\frac{x^4}{4}\right)-\left(\frac{x^5}{5}\right)\right]_0^{10}=0.006\left[\frac{100000}{4}-\frac{100000}{5}\right]-0$$

$$E(x^2)=600\left(\frac{1}{20}\right)=30$$

إذن التباين هو:

$$\sigma^2=30-25=5$$

6- إيجاد دالة التوزيع التجميعي $C.D.F$

$$F(x)=\int_0^x f(x)\;dx$$

$$=\int_0^x 0.006x(10-x)dx=0.006\left[10\left(\frac{x^2}{2}\right)-\left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^x$$

$$=0.006\left[5x^2-\left(\frac{x^3}{3}\right)\right]$$

7- ويمكن حساب هذا الاحتمال بالتعويض عن $x=5$ في الدالة $F(x)$ التي تم التوصل إليها مسبقاً

$$F(5)=P(x\le 5)=$$

$$=0.006\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]=0.006\left[125-\frac{125}{3}\right]$$

$$=0.006\left(\frac{250}{3}\right)=0.5$$

أي أن 50% من الأسر يقل إنفاقها عن 5 مائة آلف دينار

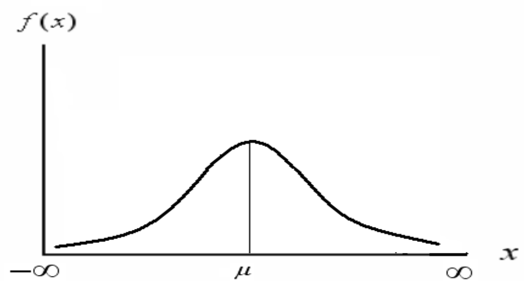
التوزيع الطبيعي The Normal Distribution

يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية وأكثرها استعمالا على الاطلاق ، بل انه يحتل موضع الصدارة في الاحتمالات والاحصاء ، وقد اش تق اسمه من أن كثيرا من التوزيعات" الطبيعية "تأخذ شكلا قريبا منه ، كذلك فإن معظم التوزيعات البيومتريه) كتوزيعات الطول والوزن (وتوزيعات أخطاء المشاهدات) الفروق بين القيم الحقيقية والقيم المشاهدة (تأخذ شكلا قريبا منه ، ويستخدم هذا التوزيع في كثير من التجارب ا لصناعية واختبارات الجودة وله استخدامات واسعه في اختبارات الفروض والعينات الكبيرة وتوزيعات المعاينة وغيرها.

إذا كان المتغير X متغير عشوائي له توزيع طبيعي ، مداه هو $-\infty<X<\infty$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\quad,\ -\infty<x<\infty\quad,\ \pi=22/7$$

وهذا التوزيع له منحنى متماثل يأخذ الصورة التالية:



فهذا المنحنى متماثل على جانبي الوسط الحسابي μ .

معالم هذا التوزيع

توجد معلمتين لهذا التوزيع هما: الوسط الحسابي : $E(x)=\mu$ والتباين : $\mathrm{var}(x)=\sigma^2$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير x بالرموز : $x \sim N(\mu,\sigma^2)$ ويعني ذلك أن المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ ، وتباين σ^2 .

خصائص التوزيع الطبيعي

هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما، بل يشتق منه كل التوزيعات الاحتمالية الأخرى المستخدمة في الاستدلال الإحصائي، ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

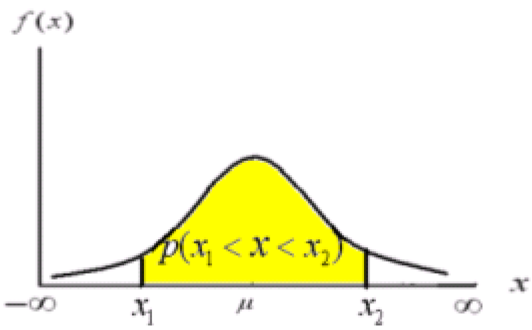
1- الوسط الحسابي μ

2- التباين σ^2

3- منحني هذا التوزيع متماثل على جانبي الوسط μ

كيفية حساب الاحتمالات $p(x_1<X<x_2)$

بفرض أن الاحتمال المطلوب حسابه هو $p(x_1<X<x_2)$ ، وهذا الاحتمال يحدد بالمساحة التالية:



واذ أن هذا التوزيع من التوزيعات المستمرة، فإن هذه المساحة (الاحتمال) تحسب بإيجاد التكامل التالي:

$$p(x_1<X<x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

وهذا التكامل يصعب حسابه، ومن ثم لجأ الإحصائيين إلى عمل تحويلة رياضية **Transform**، يمكن استخدام توزيعها الاحتمالي في حساب مثل هذه الاحتمالات، وهذه التحويلة هي:

$$z=\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

ويعرف المتغير الجديد z بالمتغير الطبيعي القياسي **Standard Normal Variable** ، وهذا المتغير له دالة كثافة احتمال تأخذ الصورة التالية:

$$f(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\quad ,\ -\infty<z<\infty\ ,\ \pi=22/7$$

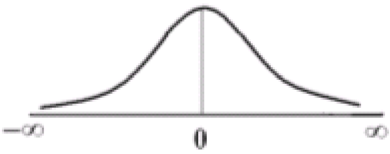
ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

1- متوسطه هو: $E(z)=0$

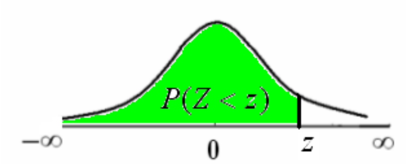
2- تباينه هو: $\text{var}(z)=1$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير z بالرموز: $z \sim N(0,1)$ ويعني ذلك أن المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي القياسي بمتوسط (0)، وتباين (1).

3- يأخذ المنحنى الشكل الناقوس المتماثل على جانبي الصفر:



وصمم الإحصائيون جداول إحصائية لحساب دالة التوزيع التجميعي: $F(z)=P(Z<z)$، كما هو مبين بالرسم التالي:



باستخدام التحويلة $z=(x-\mu)/\sigma$: $p(x_1<X<x_2)$ ونعود الآن إلى خطوات حساب الاحتمال

1- يتم تحويل القيم الطبيعية (x_1,x_2) إلى قيم طبيعية قياسية:

$$z_1=\frac{x_1-\mu}{\sigma},\quad z_2=\frac{x_2-\mu}{\sigma}$$

2- أما إذا أردنا استخراج الاحتمال لقيم سالبة لـ X فان التوزيع متماثل وعليه فانه يمكن إيجاد هذه المساحة باستخدام العلاقة التالية:-

$$P(Z\le -a)=1-P(Z\le a)$$

3- إن قيم جدول التوزيع الطبيعي القياسي محسوبة دائما للمساحة تحت المنحنى من $-\infty$ إلى النقطة المعينة a أي $P(z\le a)$ فمثلاً لو اردنا ايجاد الاحتمال

$$P(Z\ge a)=1-P(Z<a)$$

مثال(**24**): إذا كان متوسط إنتاج ماكنة طحين في مطحنة هو (**700**) كغم باليوم بانحراف معياري مقدار (**55**) كغم فإذا كان إنتاج المطحنة يتبع التوزيع الطبيعي ما هو احتمال إن ماكنة تنتج بين **625** كغم إلى **835** كغم (ما هو نسبة المكائن التي تنتج من **625** كغم إلى **835** كغم).

الحل

$$P(a < X < b) = p(Z_1 < Z < Z_2)$$

$$P(625 < X < 830) = p(Z_1 < Z < Z_2)$$

وباستعمال التحويل الى الدرجات المعيارية

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$Z_1 = \frac{625 - 700}{55} = \frac{-75}{55} = -1.363$$

$$Z_2 = \frac{835 - 700}{55} = \frac{135}{55} = 2.454$$

$$\begin{aligned} \therefore P(775 < X < 830) &= P(-1.363 < Z < 2.454) \\ &= P(Z < 2.454) - P(Z < -1.363) \\ &= P(Z < 2.454) - \{1 - P(Z < 1.363)\} \\ &= 0.9929 - \{1 - 0.9131\} = 0.906 \end{aligned}$$

أي إن **90 %** من المكائن تعطي إنتاجا يتراوح بين **625** إلى **835** كغم/باليوم الواحد.

مثال(**25**): إذا كان متوسط عمر العامل في المنشأة الصناعية هو (**27**) سنة بانحراف معياري مقداره (**4**) سنوات أوجد:

1-نسبة العمال الذين أعمارهم تتراوح بين (**23-31**) سنة

2-نسبة العمال الذين تجاوز سن **32** سنة

3-نسبة العمال الذين أعمارهم اقل من (**20**) سنة

الحل

$$1\text{-}\ P(23 < X < 31) = P(Z_1 < Z < Z_2)$$

$$P(23 < X < 31) = P\left(\frac{23 - 27}{4} < Z < \frac{31 - 27}{4}\right)$$

$$P(23 < X < 31) = P(-1 < Z < 1)$$

$$P(23 < X < 31) = P(Z < 1) - P(Z < -1)$$

$$P(23 < X < 31) = P(Z < 1) - \{1 - P(Z < 1)\}$$

$$P(23 < X < 31) = 2P(Z < 1) - 1 = 2(0.8413) - 1 = 0.6826$$

أي إن حوالي **68%** من عمال المنشأة تتراوح أعمارهم بين **23** إلى **31** سنة وهذا الاحتمال يمثل قيمة العمر (X) المحصورة بين $\mu+\sigma, \mu-\sigma$ والتي أشرنا إليها سابقا كذلك فإننا لو استخرجنا نسبة العمال بين سن **19** و **35** ستكون مساوي إلى **0.95** والتي تمثل قيمة (X) المحصورة بين $\mu+2\sigma, \mu-2\sigma$

$$2\text{-}\ P(X>32)=1-P(X<32)=1-P\left(Z<\frac{32-27}{4}\right)$$
$$P(X>32)=1-P(Z<1.25)=1-0.8944=0.1056$$

أي إن نسبة **10%** فقط من العمال قد تتجاوز سنهم إلى32 سنة.

$$3\text{-}\ P(X<20)=P(Z<Z_1)=P\left(Z<\frac{20-27}{4}\right)$$
$$P(X<20)=P(Z<-1.75)=1-P(Z<1.75)$$
$$P(X<20)=1-0.9599=0.04$$

أي إن نسبة الذين تقل أعمارهم عن **20** سنة من العمال هو **4%** فقط.

مثال(**26**): أراد أحد المديرين تعيين مجموعة من الموظفين بعد اجتيازهم امتحاناً تحريرياً وحصولهم على المستوى A وبعد إجراء الامتحان كان متوسط درجات المتقدمين هو (**80**) بانحراف معياري مقداره (**9**) فما هي اقل درجة تمثل المستوى A لكي يكون المتقدم مرشحا للوظيفة علما إن نسبة المتقدمين الذين حصلوا على المستوى A هو **0.18**.

الحـل

$$P(Z>z)=0.18$$
$$P(Z\le z)=1-p(Z>z)$$
$$P(Z\le z)=1-0.18=0.82$$

لإيجاد القيمة Z فإنها تمثل قيمة Z المقابلة للاحتمال **0.82** في جدول التوزيع الطبيعي القياسي

$$\therefore Z=0.92$$

$$0.92=\frac{x-80}{9}$$
$$\therefore x=88.28$$

المستوى A سيمثل **89** ، فإذا حصل المرشح على اقل من هذه الدرجة سوف لا يقبل في الوظيفة.

تمارين الفصل الأول

س1 ليكن المتغير X يمثل الكمية المنتجة من التمور سنوياً وبمئات الاطنان في الشركة العراقية لتصنيع وتسويق التمور (مساهمة مختلطة) الذي يخضع لدالة الكتلة الاحتمالية الاتية

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{c}x & x=1,2,3,4\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

المطلوب إيجاد :

1– قيمة الثابت c

2– الدالة التجميعية للكمية المنتجة من التمور بمئات الاطنان

3– متوسط الانتاج السنوي من التمور وكذلك الانحراف المعياري

4– احتمال ان يبلغ انتاج هذه الشركة ما بين (**1**) و(**3**) من مئات الاطنان من التمور

س2 إذا كانت نسبة الغير المعيب (الجيد) من المصابيح الاقتصادية في الشركة العامة للصناعات الكهربائية يمثل (**0.80**)، وعشوائياً سحبت عينه من المصابيح قوامها (**3**) مصابيح. فما احتمال ان تكون

1– جميع المصابيح غير معيبة

2– ان يكون هناك مصباح معيب

3– ان يكون هناك على الاكثر مصباح غير معيب

س3 في قسم الادارة الصناعية – كلية الادارة والاقتصاد لجامعة بغداد يوجد (**55**%) من الطلبة يدخنون السكائر ، (**45**%) منهم مدمنون على شرب القهوة و(**30**%) منهم مدخنون سكائر وكذلك مدمنون على شرب القهوة .اختير احد الطلبة بصورة عشوائية من هذا القسم

1–إذا كان هذا الطالب ممن يدخن السكائر ، ما احتمال ان يكون مدمناً على شرب القهوة

2– إذا كان هذا الطالب مدمناً على شرب القهوة ، ما احتمال ان يكون ممن يدخن السكائر

3– ما احتمال ان لا يكون هذا الطالب ممن يدخن السكائر أو مدمناً على شرب القهوة

س4 يعلم أحد الأشخاص إن احتمال قبوله لأشغال وظيفة معينة يبلغ **50**% كما إن احتمال قبوله في وظيفة ثانية يبلغ **60**% أو احتمال قبوله في الوظيفتين يبلغ **15**%. فما احتمال

أ. ان هذا الشخص على حصل الوظيفة الثانية بمعلومية او شرط انه قبل في الوظيفة الأولى؟

ب. قبول هذا الشخص في وظيفة واحدة على الأقل؟

ج. عدم قبول هذا الشخص في أي واحدة من الوظيفتين؟

س5 إذا كانت كمية الألبان التي تنتجها شركة العامة لمنتوجات الالبان التي تهدف إلى المساهمة في دعم

الاقتصاد الوطني في مجال صناعة الألبان ومشتقاتها بموجب المواصفات المعتمدة والمساهمة في تنمية الثروة الحيوانية وبما يحقق أهداف وخطط التنمية بألاف اللترات يومياً تخضع للبرنامج الآتي

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{c}x & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

المطلوب إيجاد :

1- قيمة الثابت c

2- الدالة التجميعية للكمية المنتجة من الالبان بألاف اللترات يومياً

3- متوسط الانتاج اليومي من الالبان وكذلك الانحراف المعياري

4- احتمال ان يبلغ انتاج هذه الشركة ما بين (1) و(3) بألاف اللترات يومياً من الالبان

س6 : يقوم أحد مكاتب المراجعة والتدقيق القانوني بتقدير نسبة الخطأ في الحسابات المدفوعة لأي شركة بنسبة 1%. وقد تم سحب عينة تتكون من 150 حساب للمراجعة والتدقيق. ما هو احتمال

1- وجود 2 أو أكثر من الأخطاء؟

2- عدم وجود أخطاء بالمرة؟

3- وجود خطأين فقط؟

س7 :في أحد المصارف التجارية، يبلغ معدل الزبائن المراجعين للحسابات الجارية 5000 زبون أسبوعيا وبانحراف معياري مقداره 800 زبون. فما

1- احتمال كون عدد المراجعين يقع بين 4760-5000؟

2- احتمال أكثر من 6500 زبون بالأسبوع؟

3- العدد الأقصى الممكن للزبائن خلال 90% من الأسابيع

س8 :إحدى شركات المقاولات الإنشائية وضعت في ميزانيتها حساب أجور للأعمال الإضافية خلال فترة الصيف وقدرها 1000 ساعة. من المعلومات السابقة لهذه الشركة بأن معدل عدد الساعات الإضافية في فصل الصيف هي 800 ساعة وبانحراف معياري قدره 100 ساعة حدد احتمال:

1- تجاوز الميزانية المخصصة للساعات.

2- عدد الساعات الإضافية تقع بين 800 إلى 1000 ساعة.

س9 : تقوم شركة النفط الوطنية بإجراء تنقيبات عن النفط في جنوب العراق. ويجري تصنيف كل بئر (كمنتج للنفط) أو (غير منتج للنفط). من خلال الخبرة الماضية فان الشركة تعلم بأن 15% من مجموع الآبار المحفورة تكون منتجة للنفط. اجب عما يلي إذا علمت إن الشركة تخطط لحفر 12 بئر:

1- ما احتمال كون أل 12 بئر منتجة للنفط؟

2- ما احتمال كون أل 12 بئر غير منتجة للنفط؟

3- ما احتمال كون بئر واحد منتجاً للنفط؟

4- إذا كانت حسابات الشركة تشير إلى إن عملية حفر 12 بئر ستكون مربحة إذا تبين إن ثلاث آبار على

الأقل منتجة للنفط، ما هو احتمال كون قرار الشركة مربحاً؟

س10: مصنع ينتج الساعات الإلكترونية تبلغ نسبة معيب في الإنتاج 4%. ما هو احتمال وجود ثلاث ساعات معيبة على الأكثر إذا كان حجم الإنتاج في أحد الأيام يبلغ 50 ساعة.

س11: في أحد المصانع التي تنتج الماكنة A 40% من المخرجات، والماكنة B 25% من المخرجات والماكنة C 35% من المخرجات. وتبلغ نسبة التلف في الإنتاج للمكائن A و B و C كالآتي: 1.5% و 1.2% و 2% على التوالي. وفي أحد الأيام قام موظف السيطرة النوعية بتحديد إحدى الوحدات التالفة، فما احتمال إنتاج هذه الوحدة التالفة من الماكنة A و B و C ؟

س12: جمعت البيانات التالية لنتائج الطلاب في مادة الاساليب الكمية في الاقسام الادارية وكما مبين ادناه

النتائج / الاقسام الادارية	الناجحين	الراسبين
الادارة العامة	15	25
الادارة الصناعية	15	10
ادارة الاعمال	20	15

اختير طالب عشوائيا

1- ما احتمال اختيار طالب من قسم الادارة العامة.
2- ما احتمال أن يكون الطالب غير ناجح و من قسم الادارة الصناعية.
3- ما احتمال أن يكون الطالب ناجح أو من قسم ادارة الاعمال
4- علماً بأن الطالب ناجح ما احتمال أن يكون من قسم الادارة الصناعية.

س13 فصل دراسي يضم (100) طالب. (40) طالب من قسم الادارة العامة ، (25) طالب من قسم الادارة الصناعية و (35) طالب من قسم ادارة الاعمال ، إذ أن نسبة النجاح كانت في قسم الادارة العامة تمثل (0.70) ، وان نسبة النجاح كانت في قسم الادارة الصناعية تمثل (0.75) وان نسبة النجاح كانت في قسم ادارة الاعمال تمثل (0.65) فأوجد ما يلي

1- ما احتمال النجاح لكل الطلاب ومن جميع الاقسام الادارية
2- ما احتمال عدم النجاح لكل الطلاب ومن جميع الاقسام الادارية
3- ما احتمال جميعهم من قسم ادارة صناعية بشرط النجاح لكل الطلاب

س14 ليكن المتغير X يمثل الارباح والخسائر السنوية بملايين الدولارات لشركة تويوتا لصناعة السيارات من مبيعاتها الذي يخضع لسلوك الدالة التجميعية وكما مبين ادناه

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{c} & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

المطلوب إيجاد :

1- قيمة الثابت c

2- الدالة الاحتمالية (دالة الكثافة الاحتمالية) للمبيعات من السيارات سنوياً

3- ما احتمال ان تتجاوز الارباح عن نصف مليون لهذه السنة

4- أوجد قيمة الثابت (a) الذي يحقق الاحتمال $P(X \le a)$ بنسبة **80 %** بمعنى $P(X \le a)=0.8$

س15 ليكن المتغير X يمثل الارباح والخسائر السنوية بملايين الدولارات لشركة سامسونج لصناعة الاجهزة الكهربائية من مبيعاتها الذي يخضع لسلوك الدالة التجميعية وكما مبين ادناه

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{c(x+1)}{6} & -5 \le x \le 7 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

المطلوب إيجاد :

1- قيمة الثابت c

2- الدالة الاحتمالية (دالة الكثافة الاحتمالية) للمبيعات من السيارات سنوياً

3- ما احتمال ان تتجاوز الارباح عن اربعة مليون لهذه السنة

4- أوجد قيمة الثابت (a) الذي يحقق الاحتمال $P(X \ge a)$ بنسبة 2/3 بمعنى $P(X \ge a)=2/3$

س16 ليكن المتغير X يمثل كمية المبيعات السنوية من اجهزة الموبايل نوع أيفون بملايين الوحدات التابعة لشركة أبل وهي شركة متخصّصة في تصميم وتصنيع الإلكترونيات واجهزة الهاتف المحمول ومنتجات برامج الكمبيوتر الاستهلاكية الذي يخضع لسلوك لدالة الكثافة الاحتمالية الاتية

$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 \le x \le 10 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

المطلوب إيجاد :

1- قيمة الثابت c

2- الدالة التجميعية للمبيعات من المنتجات الاستهلاكية سنوياً

3- ما احتمال ان تقل الكميات المنتجة عن ثلاثة ملايين لهذه السنة

4- أوجد قيمة الثابت (a) الذي يحقق الاحتمال $\mathbf{P(X \le a) = P(X > a)}$

س17 ليكن المتغير X يمثل عدد السيارات المباعة يومياً من احدى معارض النهضة في مدينة بغداد وفقاً

لدالة الكتلة الاحتمالية الاتية

$$f(x)=\begin{cases} c\binom{5}{x} & x=0,1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

المطلوب إيجاد :

1- قيمة الثابت c

2- الدالة التجميعية لعدد السيارات المباعة يومياً

3- متوسط عدد السيارات المباعة وكذلك الانحراف المعياري

4- ما احتمال ان تكون السيارات المباعة بين (1-3) سيارة باليوم

س18 ليكن المتغير X يمثل عدد حوادث السير يومياً في مدينة بغداد الذي وفقاً لدالة الكتلة الاحتمالية وكما مبينة في الجدول ادناه

X	0	1	2	3	4	5
f(x)	c	2c	3c	4c	1.5c	0.5c

المطلوب إيجاد :

1- قيمة الثابت c

2- الدالة التجميعية لعدد حوادث السير يومياً

3- متوسط عدد حوادث السير وكذلك الانحراف المعياري

4- ما احتمال ان تكون حوادث السير بين (3-5) حادث باليوم

س19: إذا كان الإنفاق الشهري للأسرة بملايين الدنانير على المواد الغذائية له دالة كثافة احتمال تأخذ الصورة التالية:

$$f(x)=\begin{cases} cx(1-x)\,, & 0<x<2/c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

والمطلوب:

1- حساب قيمة الثابت C

2- الوسط الحسابي والتباين

3- كون التوزيع الاحتمالي التجميعي

س20 ليكن المتغير X يمثل الارباح السنوية بملايين الدولارات لشركة بي أم دبليو لصناعة السيارات من مبيعاتها الذي يخضع لسلوك الدالة الاحتمالية وكما مبين ادناه

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{c}{x}\right)^2 & c\le x\le 2c\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

المطلوب إيجاد :

1- قيمة الثابت c

2- الدالة التجميعية للمبيعات من السيارات سنوياً

3- ما احتمال ان تتجاوز الارباح عن ثلاثة ملايين لهذه السنة

4- أوجد قيمة الثابت (a) الذي يحقق الاحتمال $P(X \le a)$ بنسبة 76 % بمعنى $P(X \le a)=0.76$

س21 ليكن المتغير X يمثل عدد السيارات الدفع الرباعي (4*4) المباعة يومياً من احدى معارض البياع في مدينة بغداد وفقاً لدالة الكتلة الاحتمالية الاتية

$$f(x)=\begin{cases}c\left(\dfrac{9}{10}\right)^3 & x=0,1,2,3\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

المطلوب إيجاد :

1- قيمة الثابت c

2- الدالة التجميعية لعدد السيارات المباعة يومياً

3- متوسط عدد السيارات المباعة وكذلك الانحراف المعياري

4- ما احتمال ان تكون السيارات المباعة بين (1-2) سيارة باليوم

س22 ليكن المتغير X يمثل الارباح والخسائر السنوية بملايين الدولارات لشركة (ال جي) لصناعة الاجهزة الكهربائية من مبيعاتها الذي يخضع لسلوك الدالة التجميعية وكما مبين ادناه

$$f(x)=\begin{cases}cx^2 & -1\le x\le 1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

المطلوب إيجاد :

1- قيمة الثابت c

2- متوسط عدد الاجهزة المباعة وكذلك الانحراف المعياري سنوياً

3- ما احتمال ان تتجاوز الخسائر عن نصف مليون لهذه السنة

س23 ليكن المتغير X يمثل كمية المبيعات السنوية من اجهزة التلفاز الذكية من نوع شونك بملايين الدولارات الذي يخضع لسلوك لدالة البرنامج الاحتمالية الاتية

$$f(x)=\begin{cases} c+dx^2 & 0\le x\le 1 \\ \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

علماً ان d,c ثوابت من سياق البرنامج اعلاه المطلوب إيجاد : قيمة الثوابت d,c علماً بان متوسط عدد الاجهزة المباعة (600) الف جهاز بمعنى $E(x) = 3/5$

س24 ليكن المتغير X يمثل كمية المبيعات السنوية من اجهزة التلفاز الذكية من نوع سوني بملايين الدولارات الذي يخضع لسلوك لدالة البرنامج الاحتمالية الاتية

$$f(x)=\begin{cases} c+dx & 0\le x\le 1 \\ \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

علماً ان d,c ثوابت من سياق البرنامج اعلاه المطلوب إيجاد : قيمة الثوابت d,c علماً بان الاحتمالية تتجاوز نصف عدد الاجهزة المباعة تحقق نسبة الثلث بمعنى $P(X\le 1/2)=1/3$