4

الفصل الرابع : البرمجة الخطية
(أنموذجي النقل والتخصيص وطرائق تقييمهُما)

1-4 المقدمة

وجدت طريقة النقل للتوصل إلى أسلوب أو برنامج يساعد على تحريك السلع والمستلزمات من مصادرها إلى أماكن استخدامها، وكذلك بغية توزيع المنتجات المصنعة إلى أماكن توزيعها وبيعها لغرض التقليل من النفقات الخاصة إلى أدنى حد ممكن. أن مشكلة النقل تهتم بإيجاد أسلوب امثل لتوزيع (نقل أو شحن) سلعه ما من مناطق إنتاجها (عرضها) إلى مناطق استهلاكها (طلبها) وبأقل كلفة ممكنة وهي حالة خاصة من مشاكل البرمجة الخطية. وتتمثل المشكلة أساساً في حالة تعدد المصادر (Sources) ومراكز الطلب (الاستهلاك) (Destination) والمطلوب النقل بينهما، ويزداد تعقيد المشكلة مع تعدد مراكز الطلب (الاستهلاك). فعند زيادة هذه المراكز تزداد البدائل المتاحة مما يؤثر على صعوبة تقييمها للوصول إلى أدنى الكلف، وضعت هذه الأفكار في عام 1941، وتطورت على يد عالم الرياضيات الأمريكي (دانتزنيغ) سنة عام 1953 ، ويفترض أن كل المتغيرات الموجودة قيد الدراسة ضمن مصفوفة النقل هي كميات موجبة أو صفرية . ونظراً لتعدد طرق وأساليب حلول مشكلة النقل فقد دفع الكثير من الباحثين للقيام بدراسات ومقارنات لهذه الطرق والأساليب ومنهم Napeer, Glover, karney حيث استخدموا الحاسوب الإلكتروني وبعض مشاكل النقل التطبيقية في عام 1974 لدراسة ومقارنة تفصيلية لأغلب هذه الأساليب.

2-4 تعريف أنموذج النقل (Transportation Model) بشكله الأولي والثنائي

تعد مشكلة النقل حالة خاصة من مشاكل البرمجة الخطية ، كم ورد سابقاً لذلك فان من السهولة صياغة أنموذج البرمجة الخطية لها بشكليه الأولي والثنائي بعد ترتيبها على شكل مصفوفة وكالاتي مع مراعاة أن:

m: تمثل عدد مصادر التجهيز (Sources or Origin) وهي $S_1, S_2, \ldots, S_m$ بسعة تجهيز(عرض) (Supply or Availability) وهي $a_1, a_2, \ldots, a_m$

n : تمثل عدد مراكز التسلم (Destinations or Sink) وهي $D_1, D_2, \ldots, D_n$ بسعة طلب (Demand or Requirement) وهي $b_1, b_2, \ldots, b_n$

C_{ij} : تمثل كلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر (i) إلى المركز (j)

X_{ij} : تمثل كمية أو عدد الوحدات المراد نقلها من المصدر (i) إلى المركز (j)

$n*m$: تمثل عدد المتغيرات الكلية

$n+m$: تمثل عدد القيود الكلية

U_i : تمثل المتغيرات الثنائية للقيود المرتبطة بالمصدر (i)

V_j : تمثل المتغيرات الثنائية للقيود المرتبطة بالمركز (j)

Z : تمثل أدنى حد من الكلفة الإجمالية (الكلية)

وعليه فان مصفوفة صنع القرار لمشكلة النقل كالاتي

From \ To	D_1	D_2	………………	D_n	Supply (Availability)	Dual (U_i)
S_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	………………	C_{1n} X_{1n}	a_1	U_1
S_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	………………	C_{2n} X_{2n}	a_2	U_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
S_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	………………	C_{mn} X_{mn}	a_m	U_m
Demand (Requirement)	b_1	b_2	………………	b_n	$\sum_{i=1}^{i=m} a_i = \sum_{j=1}^{j=n} b_j$	
Dual (V_j)	V_1	V_2	………………	V_n		

وأن أنموذج البرمجة الخطية (Mathematical Model) بشكله الأولي لمشكلة النقل كالاتي

$$\text{Min }(Z) = \sum_{j=1}^{j=n}\sum_{i=1}^{i=m} C_{ij} X_{ij}$$

S.T. ....(1)

$$\sum_{j=1}^{j=n} X_{ij} = a_i \quad , \quad i = 1,2,3,.........,m$$

......................................(2)

$$\sum_{i=1}^{i=m} X_{ij} = b_j \quad , \quad j = 1,2,3,.........,n$$

......................................(3)

$$X_{ij} \geq 0$$

......................................(4)

أن الحل الأســاســي الأولي المقبول لمشــكلة النقل (Basic Solution) عبارة عن قيم المتغيرات التي وجدت بحل معادلات القيود (3) , (2) . بعد جعل عدد المتغيرات n*m مطروح منها عدد القيود n+m مســاوية للصــفر، وإذا تحقق الشــرط (4) ســيدعى الحل بالحل الأســاســي المقبول (Basic Feasible Solution)، أما فيما يخص الحل الأمثل لمشــكلة النقل فهو الحل الأســاسي المقبول والذي يحقق المعادلة (1) من بين جميع الحلول المقبولة .وكذلك فان أنموذج البرمجة الخطية بشكله الثنائي لمشكلة النقل كالاتي

$$\text{Max}\ (Z) = \sum_{i=1}^{i=m} a_i U_i + \sum_{j=1}^{j=n} b_j V_j$$

S.T.

$$U_i + V_j \le C_{ij}$$

$$U_i\ ,\ V_j \text{ are U.R.S.}$$

3-4 موازنة أنموذج النقل (Balanced T.M.) (التحويل إلى الشكل القياسي) قبل بدء

الحل الأساسي المقبول وبأي طريقة كانت لابد أن يكون النموذج متوازن، وذلك عن طريق تساوي أو تكافئ الكميات المطلوبة الإجمالية مع الكميات المعروضة الإجمالية، ورياضياً يعبر عنه

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_i = \sum_{j=1}^{j=n} b_j$$

وعندما تكون الكميات المطلوبة أكبر من الكميات المعروضة بمعنى أن $\sum_{i=1}^{i=m} a_i < \sum_{j=1}^{j=n} b_j$ **، يضاف إلى مصفوفة صنع القرار (مصفوفة النقل) مصدر وهمي (Dummy Source) يعمل على تجهيز الكمية التي حصل فيها عجز مقدارها وكالاتي:**

$$S_{m+1} = \sum_{j=1}^{j=n} b_j - \sum_{i=1}^{i=m} a_i$$

علماً أن كلفة المصدر الوهمي هي كمية صفرية بمعنى $C_{i,n+1} = 0$

وعندما تكون الكميات المطلوبة أصغر من الكميات المعروضة بمعنى أن $\sum_{i=1}^{i=m} a_i > \sum_{j=1}^{j=n} b_j$ **، يضاف إلى مصفوفة صنع القرار (مصفوفة النقل) مركز تسلم وهمي (Dummy Destination) يعمل على تجهيز الكمية التي حصل فيها عجز مقدارها وكالاتي:**

$$D_{m+1} = \sum_{i=1}^{i=m} a_i - \sum_{j=1}^{j=n} b_j$$

علماً أن كلفة المركز الوهمي هي كمية صفرية بمعنى $C_{m+1,i} = 0$

4-4 التفكك (Degeneracy):

تظهر هذه الحالة عندما لا يتحقق شرط عدد الخلايا المشغولة لا يمثل (n+m-1).بمعنى تساوي إحدى الكميات المطلوبة مع إحدى الكميات المعروضة مما يجعل قيمة إحدى المتغيرات الأساسية تساوي صفر (Xij=0)

4-5 طرائق إيجاد الحل الأساسي المقبول لأنموذج النقل S.B.F.S. Meth.

بغية الوصول إلى حل أساسي مقبول لأنموذج النقل لا يتعارض مع طبيعة المشكلة المدروسة، ومنه يمكن الانطلاق إلى حل امثل. هناك عدة طرق تختلف من حيث الوقت والجهد المطلوب للوصول إلى حل أولي، إذ كلما بذلت جهود كثيرة للتوصل إلى الحل الأولي قلت الجهود للتوصل إلى الحل الأمثل الذي يعني الوصول إلى اقل مستوى من إجمالي كلف النقل، وسيتم التطرق إلى الطرق الثلاثة الأكثر استخداماً وشيوعاً للحصول على الحل الأساسي المقبول.

4-5-1 طريقة الركن الشمالي الغربي North West Corner Method

تعد هذه الطريقة من أسهل الطرائق على الإطلاق، حيث لا تأخذ بنظر الاعتبار الكلف ، ولا يستخدم فيها أي منطق علمي في عملية التوزيع الكميات المتاحة من حيث العرض والطلب . وتتلخص خطوات هذه الطريقة بما يلي:

1. لابد أن يكون الأنموذج متوازن بمعنى أن $\sum_{i=1}^{i=m} a_i = \sum_{j=1}^{j=n} b_j$
2. أبدا بأول مربع من جهة اليسار بمعنى تفعيل الخلية S_1D_1
3. أختر كمية المواد الأقل من حيث الطلب أو التجهيز بمعنى أن $X_{ij}=Min\ (a_i, b_j)$
4. أطرح كمية المواد من الطلب أو التجهيز وصفر كمية المواد باتجاه الطلب إذا كانت كمية الطلب مُستنفذة (مساوية للصفر). أو باتجاه التجهيز إذا كانت كمية التجهيز مُستنفذة
5. أنتقل للمربع التالي (سواء كان طلب آم تجهيز)
6. إذا كانت كمية المواد في أحد المربعات مُستنفذة فاقفز عنه
7. كرر ما ورد أعلاه ، ثم احسب الكلفة الكلية. مع مراعاة أن عدد الخلايا المشغولة $n+m-1$

أمثلة محلولة

<u>مثال 1 (الأنموذج متوازن):</u> أوجد الحل الاساسي المقبول من مصفوفة النقل أدناه مستخدماً طريقة الركن الشمالي الغربي

To / From	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	20	16	14	20	9
S_2	9	15	16	10	8
S_3	8	13	5	9	7
S_4	9	6	5	11	5
Demand	5	10	5	9	

<u>الحل : بما أن مجموع الكميات المطلوبة هي نفسها مجموع الكميات المعروضة وتساوي 29 ورياضياً</u>

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_i = \sum_{j=1}^{j=n} b_j = 29$$

وعليه فان الحل الاساسي المقبول لمصفوفة النقل هو كالاتي

To / From	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	20 5	16 4	14	20	9 4 ....
S_2	9	15 6	16 2	10	8 2 ....
S_3	8	13	5 3	9 4	7 4 ....
S_4	9	6	5	11 5	5 ....
Demand	5	10 6	5 3	9 5	

وان مجموع عدد المصادر ومراكز الاستلام (الإطار) يساوي سبعة بمعنى ان (n+m-1=7) وأن

المسافة		الكمية المنقولة	كلفة الوحدة الواحدة ($)	الكمية المنقولة* كلفة الوحدة الواحدة ($)
من	الى			
S_1	D_1	5	20	5*20=100
S_1	D_2	4	16	4*16=64
S_2	D_2	6	15	6*15=90
S_2	D_3	2	16	2*16=32
S_3	D_3	3	5	3*5=15
S_3	D_4	4	9	4*9=36
S_4	D_4	5	11	5*11=55
الكلفة الكلية ($)				392

مثال 2 (الأنموذج غير متوازن): أوجد الحل الاساسي المقبول من مصفوفة النقل أدناه مستخدماً طريقة الركن الشمالي الغربي

To / From	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	11	10	7	250
S_2	8	9	12	300
S_3	13	6	5	300
Demand	300	200	200	

الحل : بما أن مجموع الكميات المطلوبة (700) وأن مجموع الكميات المعروضة (850) وعليه سيتم اضافة مركز استلام وهمي وبكلفة مقدارها صفر وهو $D_4=850-700=150$ وان مصفوفة النقل ستكون بالشكل الاتي

To / From	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	11	10	7	0	250
S_2	8	9	12	0	300
S_3	13	6	5	0	300
Demand	300	200	200	150	850 / 850

وعليه فان الحل الاساسي المقبول لمصفوفة النقل هو كالاتي

To / From	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	11 250	10	7	0	250 .....
S_2	8 50	9 200	12 50	0	300 250 50 .....
S_3	13	6	5 150	0 150	300 150 .....
Demand	300 50	200	200 150	150	

وأن الكلفة الاجمالية

Min Z=250*11+50*8+200*9+50*12+150*5=6300

مثال 3 (مشكلة التفكك): أوجد الحل الاساسي المقبول من مصفوفة النقل أدناه مستخدماً طريقة الركن الشمالي الغربي

To / From	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	10	20	5	7	1000
S_2	13	9	12	8	700
S_3	4	15	7	9	900
Demand	900	800	500	400	

الحل : بما أن مجموع الكميات المطلوبة هي نفسها مجموع الكميات المعروضة وتساوى 2600 ورياضياً

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_i = \sum_{j=1}^{j=n} b_j = 2600$$

وعليه فان الحل الاساسي المقبول لمصفوفة النقل هو كالاتي

From \ To	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	10 900	20 100	5	7	1000 100 ......
S_2	13	9 700	12	8	700 ......
S_3	4	15 0	7 500	9 400	900 900 500
Demand	900	800 700 0	500	400	

وعليه فان الحل متفكك وذلك بسبب قيمة احدى المتغيرات الاساسية او قيمة احدى الخلايا المشغولة تساوي صفر بمعنى اخر ان $X_{32}=0$ وان الكلفة الاجمالية هي كما مبين ادناه

$$Min\ Z=900*10+100*20+700*9+500*7+400*9= 24400$$

2-5-4 طريقة الأقل كلفة (Least or Lowest) Cost Method

وتسمى أيضاً بالطريقة الحدسية (Intuitive Approach) وكذلك بالطريقة ذات الأقل كلفة للمصفوفة (Minimum Matrix Method) هي طريقة أفضل من الطريقة السابقة حيث تأخذ بنظر الاعتبار كلفة النقل من المصدر إلى المركز، وتتلخص خطوات هذه الطريقة بما يلي

1. لابد أن يكون الأنموذج متوازن بمعنى أن $\sum_{i=1}^{i=m} a_i = \sum_{j=1}^{j=n} b_j$
2. حدد الخلية ذات كلفة اقل في المصفوفة ككل وخصص لها اقل كمية ممكنة. وفي حالة وجود اكثر من خلية ذات كلفة اقل، اختر تلك الخلية التي يمكن نقل اكبر كمية ممكنة من خلالها
3. أطرح كمية المواد من المصدر المجهز (الصف) أو من مركز الطلب (العمود) من الكمية المراد نقلها
4. إذا كان المتوفر من المصدر (الصف) قد اسُتنفذ فاقفز عنه، وإذا تم تلبية الطلب (العمود) فاقفز عنه
5. كرر ما ورد أعلاه، ثم احسب الكلفة الكلية. مع مراعاة أن عدد الخلايا المشغولة n+m-1

أمثلة محلولة

مثال 1 (الأنموذج متوازن): أوجد الحل الاساسي المقبول من مصفوفة النقل أدناه مستخدماً طريقة الحدسية

To / From	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	20	16	14	20	9
S_2	9	15	16	10	8
S_3	8	13	5	9	7
S_4	9	6	5	11	5
Demand	5	10	5	9	

الحل : بما أن مجموع الكميات المطلوبة هي نفسها مجموع الكميات المعروضة وتساوى 29 ورياضياً

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_i = \sum_{j=1}^{j=n} b_j = 29$$

وعليه فان الحل الاساسي المقبول لمصفوفة النقل هو كالاتي

To / From	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	20	16 5	14	20 4	9 4 ….
S_2	9 3	15	16	10 5	8 5 ….
S_3	8 2	13	5 5	9	7 2 ….
S_4	9	6 5	5	11	5 ….
Demand	5 3 …..	10 5 …..	5 …..	9 4 …..	

وان مجموع عدد المصادر ومراكز الاستلام (الإطار) يساوي سبعة بمعنى ان (n+m-1=7) وأن الكلفة الكلية

$$\text{Min}(Z) = \sum_{j=1}^{j=n}\sum_{i=1}^{i=m} C_{ij}X_{ij} = 308$$

مثال 2 (الأنموذج غير متوازن وكذلك متفكك): أوجد الحل الاســاســي المقبول من مصــفوفة النقل أدناه مستخدماً طريقة أقل كلفة

To / From	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	11	10	7	250
S_2	8	9	12	300
S_3	13	6	5	300
Demand	300	200	200	

الحل : بما أن مجموع الكميات المطلوبة (700) وأن مجموع الكميات المعروضة (850) وعليه سيتم اضافة مركز استلام وهمي وبكلفة مقدارها صفر وهو D_4=850-700=150 وان مصفوفة النقل ستكون بالشكل الاتي

To / From	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	11	10	7	0	250
S_2	8	9	12	0	300
S_3	13	6	5	0	300
Demand	300	200	200	150	850 / 850

وعليه فان الحل الاساسي المقبول لمصفوفة النقل هو كالاتي

To / From	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	11 0	10 100	7	0 150	250 250 150 .....
S_2	8 300	9	12	0	300 .....
S_3	13	6 100	5 200	0	300 100 .....
Demand	300 0	200 100	200	150	

وعليه فان الحل يعاني من مشكلة التفكك بالرغم من كون الأنموذج غير متوازن وأن الكلفة الاجمالية

$$Min(Z) = \sum_{j=1}^{j=n}\sum_{i=1}^{i=m} C_{ij} X_{ij} = 5000$$

4-5-4 طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximation

وتتلخص خطوات هذه الطريقة بما يلي

1. لابد أن يكون الأنموذج متوازن بمعنى أن $\sum_{i=1}^{i=m} a_i = \sum_{j=1}^{j=n} b_j$
2. بناء عمود فرق أو (جزاء) للأسطر، بعدها يتم حساب الفرق بين أقل كلفتين للسطر المناظر
3. بناء سطر فرق أو (جزاء) للأعمدة، بعدها يتم حساب الفرق بين أقل كلفتين للعمود المناظر
4. تحديد أعلى فرق للأسطر أو الأعمدة، عندها يتم اختيار وإشباع الخلية ذات اقل كلفة مناظرة من الصف (التجهيز) أو العمود (الطلب) لتصبح الكمية المراد نقلها
5. نستبعد الصف أو العمود الذي تم إشباعه أو الذي أخذ حاجته حتى لا يدخل في الحساب من جديد
6. كرر ما ورد أعلاه، ثم احسب الكلفة الكلية . مع مراعاة أن عدد الخلايا المشغولة n+m-1

أمثلة محلولة

مثال 1 (الأنموذج متوازن): أوجد الحل الاساسي المقبول من مصفوفة النقل أدناه مستخدماً طريقة فوجل التقريبية

To / From	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	20	16	14	20	9
S_2	9	15	16	10	8
S_3	8	13	5	9	7
S_4	9	6	5	11	5
Demand	5	10	5	9	

الحل : بما أن مجموع الكميات المطلوبة هى نفسها مجموع الكميات المعروضة وتساوي 29 ورياضياً

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_i = \sum_{j=1}^{j=n} b_j = 29$$

وعليه فان الحل الاساسى المقبول لمصفوفة النقل هو كالاتى

To / From	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply	Differences				
S_1	20	16 5	14	20 4	9	2	2	4	0	0
S_2	9 3	15	16	10 5	8	1	1	1	1	1
S_3	8 2	13	5 5	9	7	3	3	1	1	……
S_4	9	6 5	5	11	5	1	……	……	……	……
Demand	5	10	5	9						
Differences	1	7	0	1						
	1	2	9	1						
	1	2	……	1						
	1	……	……	1						
	11	……	……	10						

وعليه فان الكلفة الاجمالية

$$\text{Min}(Z) = \sum_{j=1}^{j=n}\sum_{i=1}^{i=m} C_{ij}X_{ij} = 308$$

مثال 2 (الأنموذج غير متوازن وكذلك متفكك): أوجد الحل الاســاســي المقبول من مصــفوفة النقل أدناه مستخدماً طريقة فوجل التقريبية

To / From	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	11	10	7	250
S_2	8	9	12	300
S_3	13	6	5	300
Demand	300	200	200	

الحل : بما أن مجموع الكميات المطلوبة (700) وأن مجموع الكميات المعروضة (850) وعليه سيتم اضافة مركز استلام وهمي وبكلفة مقدارها صفر وهو $D_4=850-700=150$ وان مصفوفة النقل ستكون بالشكل الاتي

From \ To	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	11	10	7	0	250
S_2	8	9	12	0	300
S_3	13	6	5	0	300
Demand	300	200	200	150	850 \ 850

وعليه فان الحل الاساسي المقبول لمصفوفة النقل هو كالاتي

From \ To	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply	Differences			
S_1	11	10	7 100	0 150	250	3	3	……	……
S_2	8 300	9 0	12	0	300	1	1	1	1
S_3	13	6 200	5 100	0	300	1	1	1	7
Demand	300	200	200	150					
Differences	3	3	2	……					
	3	3	2	……					
	5	3	7	……					
	5	3	……	……					

$$Min(Z)=\sum_{j=1}^{j=n}\sum_{i=1}^{i=m} C_{ij}X_{ij}=5300$$