نموذج الانحدار الخطي المتعدد

كما ذكرنا سابقاً فأن نموذج الانحدار الخطي البسيط يركز على دراسة العلاقة ما بين متغيرين احدهما المتغير التابع y والاخر المتغير المستقل X غير ان واقع الحياة الاقتصادية والاجتماعية تفترض بشكل عام ان اي ظاهرة اقتصادية تتأثر بأكثر من متغير مستقل فعلى سبيل المثال دالة الانتاج والتي توصف العلاقة بين الانتاج وعناصره وكذلك دالة الطلب والتي تحدد العلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة ما واسعار تلك السلعة واسعار السلع البديلة والمكملة ودخل المستهلك وغيرها من المتغيرات

لذا وعلى هذا الاساس فأن نموذج الانحدار الخطي المتعدد يكون فيه المتغير التابع دالة لاكثر من متغير مستقل اي ان :

$$y = f(X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots X_n)$$

وعلى مستوى دراستنا فأننا نكتفي بنموذج الانحدار الخطي المتعدد الذي يحوي متغيرين مستقلين اي ان y دالة في X_1, X_2

$y = f(X_1, X_2)$ علاقة دالية

الشكل الرياضي للعلاقة الدالية $\quad y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$

نحول الشكل الرياضي الى قياسي باضافة المتغير العشوائي

$$y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + u_i$$

الشكل العام للنموذج الخطي المتعدد ذوي المتغيرين حيث :

Y متغير تابع

X_1, X_2 متغيرات مستقلة تؤثر في المتغير التابع ولا تتأثر به

b_0, b_1, b_2 معالم [illegible]

b_0 : الحد الثابت يمثل المسافة المحصورة ما بين نقطة الاصل ونقطة تقاطع خط الانحدار مع المحور العمودي

b_1 : مقدار التغير في Y عند تغير X بمقدار وحدة واحدة

$b_1 = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$ مع ثبات X_2

b_2 مقدار التغير في Y عند تغير X_2 بمقدار وحدة واحدة

مع ثبات X_1 $\quad b_2 = \frac{\Delta Y}{\Delta X_2}$

U_i المتغير العشوائي او حد الخطأ او ما يسمى حد الاضطراب وهو يعبر عن الاخطاء الموجودة والاخطاء العشوائية ولغرض تقدير معالم النموذج الخطي المتعدد (b_0, b_1, b_2) يستوجب تحقيق الفروض الخاصة بالمتغير العشوائي $U_i \sim (0, \sigma_u^2)$

فروض النموذج الخطي المتعدد

عند استخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية OLS في تقدير نموذج الانحدار الخطي ~~البسيط~~ المتعدد فانه يجب تحقيق جميع الفروض الخاصة بالنموذج الخطي (كتابة الفروض ١٠)

طرق تقدير النموذج الخطي المتعدد

① طريقة الانحرافات عن المتوسطات

ويتم الحصول على مقدرات النموذج وفق الصيغ الآتية :

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum yx_1 \sum x_2^2 - \sum y x_2 \sum x_1x_2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1x_2)^2}$$

$$\hat{b}_2 = \frac{\sum yx_2 \sum x_1^2 - \sum yx_1 \sum x_1x_2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1x_2)^2}$$

$$\hat{b}_0 = \bar{y} - \hat{b}_1 \bar{X}_1 - \hat{b}_2 \bar{X}_2$$

ويمكن الحصول على المجاميع الانحرافية من المجاميع الحقيقية وفق الصيغ الآتية :

$$\sum y^2 = \sum y^2 - n\bar{y}^2$$
$$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - n\bar{X}_1^2$$

$$\sum x_2^2 = \sum X_2^2 - n\bar{X}_2^2$$
$$\sum x_1x_2 = \sum X_1X_2 - n\bar{X}_1\bar{X}_2$$

$$\sum yx_1 = \sum yX_1 - n\bar{y}\bar{X}_1$$
$$\sum yx_2 = \sum yX_2 - n\bar{y}\bar{X}_2$$

مثال / البيانات التالية تتضمن ~~الاسعار~~ الاستيرادات متغير تابع Y والدخل القومي متغير مستقل اول X_1 واسعار الاستيرادات متغير مستقل ثاني X_2 في احد الدول ولمدة ثمان سنوات

المطلوب / اقدر دالة الاستيرادات ثم بين مدى توافقها مع النظرية الاقتصادية

$$Y = f(X_1, X_2)$$

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2$$

$$b_0 > 0$$

$$b_1 > 0$$

$$b_2 < 0$$

معطيات السؤال

Y	X_1	X_2	X_1^2	X_2^2
100	100	100	10000	10000
106	104	99	10816	9801
107	106	110	11236	12100
120	111	126	12321	15876
110	111	113	12321	12769
116	115	103	13225	10909
124	120	102	14400	10404
133	124	103	15376	10909
137	126	98	15876	9604
1053	1017	954	115571	101772

$$\Sigma x_2 y = \Sigma X_2 Y - n\bar{X}_2 \bar{Y}$$

$$\Sigma x_2 y = 111535 - 9(106)(117)$$

$$= 111535 - 111618$$

$$= -83$$

$$\Sigma x_1 x_2 = \Sigma X_1 X_2 - n\bar{X}_1 \bar{X}_2$$

$$= 107690 - 9(113)(106)$$

$$= 107690 - 107802$$

$$= -112$$

$$\Sigma x_1^2 = \Sigma X_1^2 - n\bar{X}_1^2$$

$$= 115571 - 9(113)^2$$

$$= 115571 - 114921$$

$$= 650$$

$$\Sigma x_2^2 = \Sigma X_2^2 - n\bar{X}_2^2$$

$$= 101772 - 9(106)^2$$

$$= 101772 - 101124$$

$$= 648$$

$$\hat{b}_1 = \frac{(881)(648) - (-83)(-112)}{(650)(648) - (-112)^2}$$

$$\hat{b}_1 = \frac{570888 - 9296}{421200 - 12544} = \frac{561592}{408656}$$

$$\hat{b}_1 = 1.374241416$$

$$\hat{b}_2 = \frac{\Sigma y x_2 \, \Sigma x_1^2 - \Sigma y x_1 \, \Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_1^2 \, \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

$$= \frac{(-83)(650) - (881)(-112)}{(650)(648) - (-112)^2}$$

$$= \frac{-53950 - (-98672)}{421200 - 12544} = \frac{44722}{408656}$$

$$\hat{b}_2 = 0.109436787$$

$$\hat{b}_0 = \bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{X}_1 - \hat{b}_2 \bar{X}_2$$

$$= 117 - (1.374241416)(113) - (0.109436787)(106)$$

$$= 117 - 155.2892057 - 11.60029359$$

$$= -49.88949929$$

$$\hat{Y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_1 + \hat{b}_2 X_2$$

$$\hat{Y} = -49.88949929 + 1.374241416 X_1 + 0.109436787 X_2$$

تشير المعادلة التقديرية اعلاه الى وجود علاقة طردية بين المتغير التابع Y والذي يمثل الاستيرادات والمتغير المستقل X_1 الذي يمثل الدخل القومي فكل زيادة في X_1 بمقدار وحدة واحدة تزداد Y بمقدار (1.374) وحدة مع ثبات أثر X_2. كما تشير هذه المعادلة الى وجود علاقة طردية بين الاستيرادات والمتغير المستقل X_2 الذي يمثل السعر فعند زيادة X_2 بمقدار وحدة واحدة تزداد الاستيرادات بمقدار (0.109) وحدة مع ثبات أثر X_1 وهنا تخالف منطق النظرية الاقتصادية اذ تشير النظرية الى وجود علاقة عكسية بين السعر والاستيرادات

$$\hat{B} = (X'X)^{-1}(X'y)$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix}$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix}$$

$$(X'Y) = \begin{bmatrix} \Sigma y x_1 \\ \Sigma y x_2 \end{bmatrix}$$

$$B = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma y x_1 \\ \Sigma y x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} = \frac{adj \begin{bmatrix} \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_2^2 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_2^2 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} \Sigma y x_1 \\ \Sigma y x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \Sigma x_2^2 & -\Sigma x_1 x_2 \\ -\Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_1^2 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_2^2 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} \Sigma y x_1 \\ \Sigma y x_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{b}_1 = \frac{\Sigma x_2^2 \Sigma y x_1 - \Sigma y x_2 \Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_1^2 \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

الموضوع :

٩

التاريخ / / ٢٠١

$$\hat{b}_2 = \frac{\Sigma y x_2 \Sigma x_1^2 - \Sigma y x_1 \Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_1^2 \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

deluxe

الاختبارات الاحصائية

١- اختبار الخطأ المعياري

$$S(\hat{b}_1) = \sqrt{var(\hat{b}_1)} = \sqrt{\frac{\sigma_u^2 \sum x_2^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}}$$

$$var(\hat{b}_1) = \frac{\sigma_u^2 \sum x_2^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$var(\hat{b}_2) = \frac{\sigma_u^2 \sum x_1^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$S(\hat{b}_2) = \sqrt{\frac{\sigma_u^2 \sum x_1^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (x_1 x_2)^2}}$$

$S(\hat{b}_i) < \frac{\hat{b}_i}{2}$ نقبل الفرضية البديلة ونرفض العدم اي ان المقدر معنوي احصائياً

$S(\hat{b}_i) > \frac{\hat{b}_i}{2}$ نقبل فرضية العدم ونرفض الفرضية البديلة اي ان المقدر غير معنوي احصائياً

$K = 3$

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

$$\sum e_i^2 = \sum y^2 - \hat{b}_1^2 \sum x_1^2 - \hat{b}_2^2 \sum x_2^2$$

$$\sum e^2 = \sum y^2 - \hat{b}_1 \sum y x_1 - \hat{b}_2 \sum y x_2$$

$$\sum y^2 = \sum \hat{y}^2 + \sum e^2$$

$$\sum y^2 = \sum Y^2 - n\bar{Y}^2$$

اختبار t

$$t^*(\hat{b}_1) = \frac{\hat{b}_1}{S(\hat{b}_1)}$$

$$t^*(\hat{b}_2) = \frac{\hat{b}_2}{S(\hat{b}_2)}$$

$$t^*(\hat{b}_0) = \frac{\hat{b}_0}{S(\hat{b}_0)}$$

$$t\left(\frac{\alpha}{2}, n-K\right)$$

$t^*(\hat{b}_1) > t\left(\frac{\alpha}{2}, n-K\right)$ نقبل بالفرضية البديلة ونرفض العدم أي أن المقدر معنوي احصائياً

$t^*(\hat{b}_1) < t\left(\frac{\alpha}{2}, n-K\right)$ نقبل بفرضية العدم ونرفض الفرضية البديلة أي أن المقدر غير معنوي احصائياً

حدود أو فترة الثقة

$$pr = \boxed{\hat{b}_0 - t\left(\frac{\alpha}{2}, n-K\right) * S(\hat{b}_0) < b_0 < \hat{b}_0 + t\left(\frac{\alpha}{2}, n-K\right) * S(\hat{b}_0)}$$

$$pr \boxed{\hat{b}_1 - t\left(\frac{\alpha}{2}, n-K\right) * S(\hat{b}_1) < b_1 < \hat{b}_1 + t\left(\frac{\alpha}{2}, n-K\right) * S(\hat{b}_1)}$$

$$pr \boxed{\hat{b}_2 - t\left(\frac{\alpha}{2}, n-K\right) * S(\hat{b}_2) < b_2 < \hat{b}_2 + t\left(\frac{\alpha}{2}, n-K\right) * S(\hat{b}_2)}$$

$$95\,(-0.16 < b_2 < 2.14)$$

التفسير يكون كالآتي / نلاحظ من فترة الثقة ان القيمة المقدرة لـ $\hat{b}_2$ تقترب من القيمة الحقيقية بحد ادنى (-0.16) وحد اعلى مقداره (2.14) ومستوى ثقة 95

مصفوفة التباين والتباين المشترك

$$\text{Cov} - \text{Var}(\hat{B}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1}$$

$$= \sigma_u^2 \begin{bmatrix} \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_2^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\text{Cov} - \text{Var}(\hat{B}) = \sigma_u^2 \frac{\begin{bmatrix} \Sigma x_2^2 & -\Sigma x_1 x_2 \\ -\Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_1^2 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_2^2 \end{vmatrix}}$$

$$\text{Var}(\hat{b}_1) = \frac{\sigma_u^2 \Sigma x_2^2}{\Sigma x_1^2 \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

$$\text{Var}(\hat{b}_2) = \frac{\sigma_u^2 \Sigma x_1^2}{\Sigma x_1^2 \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

معامل التحديد ومعامل التحديد المصحح او المعدل

$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma e^2}{\Sigma y^2} \qquad \Sigma e^2 = \Sigma y^2 - \Sigma \hat{y}^2$$

$$R^2 = \frac{\Sigma \hat{y}^2}{\Sigma y^2} = \frac{\hat{b}_1 \Sigma y x_1 + \hat{b}_2 \Sigma y x_2}{\Sigma y^2} = \frac{\hat{b}_1^2 \Sigma x_1^2 + \hat{b}_2^2 \Sigma x_2^2}{\Sigma y^2}$$

$$\Sigma \hat{y}^2 = \hat{b}_1 \Sigma y x_1 + \hat{b}_2 \Sigma y x_2$$

$$\Sigma \hat{y}^2 = \hat{b}_1^2 \Sigma x_1^2 + \hat{b}_2^2 \Sigma x_2^2$$

مثلاً لو كانت قيمة $R = 0.88$ فان التفسير يكون كالآتي :
نلاحظ من خلال معامل التحديد ان 88% من التغيرات الحاصلة في المتغير التابع يكون سببها وجود المتغيرات المستقلة وان 12% تعود الى وجود المتغير العشوائي

ان اضافة متغيرات مستقلة جديدة الى النموذج تؤدي الى رفع قيمة معامل التحديد R وذلك لثبات قيمة المقام وزيادة البسط بمقدار $b_i \Sigma y x_i$ غير ان الاستمرارية باضافة المتغيرات المستقلة ستؤدي الى انخفاض درجات الحرية بمقدار $n-K$ مما يتطلب ذلك استخراج قيمة معامل التحديد المصحح او المعدل والذي يرمز له بالرمز R^{-2} والذي يحسب وفق الصيغة الآتية :

$$R^{-2} = 1 - \boxed{(1 - R^2)\,\frac{n-1}{n-K}}$$

ودائماً تكون قيمة R^{-2} اقل من قيمة R

يمكن ان تكون قيمة R^{-2} سالبه عندما تقترب قيمة معامل التحديد من الصفر R والقيمه السالبه تعادل معاملة (الصفر) لا القيمه الصفريه) اي ان المتغير المستقل ليس له تأثير على المتغير التابع

جدول تحليل التباين واختبار المعنويه الكلية للنموذج (F^*)

ANOVA TABIE

مصادر التباين أو الاختلاف	مجموع المربعات S.S	درجات الحريه	متوسط مجموع المربعات	F^*
RSS	$\sum\hat{y}^2=\hat{b}_1\sum yx_1+\hat{b}_2\sum yx_2$ $\sum\hat{y}^2=\hat{b}_1^2\sum x_1^2+\hat{b}_2\sum x_2^2$	$K-1$	$\sum\hat{y}^2/K-1$	$F^*=\frac{\sum\hat{y}^2/K-1}{\sum e^2/n-K}$
ESS	$\sum e_i^2=\sum y^2-\sum\hat{y}^2$	$n-K$	$\sum e^2/n-K$ $=\sigma_u^2$	
TSS	$\sum y^2=\sum Y^2-n\bar{Y}^2$ $\sum y^2=\sum\hat{y}^2+\sum e^2$	$n-1$		

ملاحظات / اذا كان مستوى معنوية 5%

$F(0.05, 1, 8)$

$F(0.05, 2, 8)$

$F(0.05, 2, 7)$

نأخذ درجات الحرية 2 في النموذج المتعدد والبسيط اما في حال تشابه درجات الحرية نأخذ حسب المشاهدات في الجدول اذا كان عدد المشاهدات 10 نختار $F(0.05, 2, 7)$ اما اذا كانت 11 نختار $F(0.05, 2, 8)$ (حسب الاكثر)

لا يجوز استخدام كلمة المتغير في النموذج

علاقة دالية بمعنى علاقة اعتيادية اي ان المتغير التابع يعتمد على المتغير المستقل وبالعكس

بالعودة الى المثال السابق

احسب :

① مصفوفة التباين والتباين المشترك لمقدرات الميل

② اختبر المعنوية الاحصائية للمقدرات عند مستوى معنوية 5% اذا علمت ان قيمة t تساوي 2.541 (t الجدولية)

③ اوجد حدود الثقة لمقدرات الميل $\hat{b}_1$ $\hat{b}_2$

④ احسب القوة التفسيرية للنموذج R^2 $\bar{R}^2$ ومعامل التحديد ومعامل التوافق

⑤ اختبر المعنوية الكلية من خلال جدول تحليل التباين اذا علمت ان قيمة F الجدولية عند مستوى معنوية 5%

⑥ احسب المرونة السعرية والدخلية عند المتوسطات $F(0.05, 2, 6) = 5.14$

⑦ تنبأ بقيمة الاستيرادات لعام 2020 $X_1 = 135$, $X_2 = 112$

اذا توفرت المعطيات الاتية : ~~صونة ما~~

$\Sigma x_1^2 = 650$

$\Sigma x_2^2 = 648$ $\Sigma x_1 x_2 = -112$

$\Sigma y x_1 = 881$, $\Sigma y x_2 = -83$

$\Sigma y^2 = 1274$

الحل /

١) مصفوفة التباين والتباين المشترك لمقدرات الميل

$$\Sigma e_i^2 = \Sigma y^2 - \hat{b}_1 \Sigma y x_1 - \hat{b}_1 \Sigma y x_2$$

$$= 1274 - 1.37 \times 881 - 0.11 \times -83$$

$$= 76.16$$

$$\sigma_u^2 = \frac{\Sigma e_i^2}{n-K} = \frac{76.16}{6} = 12.069$$

$$Cov = Var(\hat{B}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1}$$

$$Cov = var(\hat{B}) = 2.069 \frac{\begin{bmatrix} 648 & 112 \\ 112 & 650 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 650 & 112 \\ 112 & 648 \end{vmatrix}}$$

$$Cov = var(\hat{B}) = 2.069 \begin{bmatrix} \frac{648}{408656} & \frac{112}{408656} \\ \frac{112}{408656} & \frac{650}{408656} \end{bmatrix}$$

$$Cov = Var(\hat{B}) = 2.069 \begin{bmatrix} 0.0015 & 0.002 \\ 0.0002 & 0.0015 \end{bmatrix}$$

$$Cov = Var(\hat{B}) = \begin{bmatrix} \overset{Var(\hat{b}_1)}{0.0019} & 0.003 \\ 0.003 & \underset{Var(\hat{b}_2)}{0.0019} \end{bmatrix}$$

٢)

$$S(\hat{b}_1) = \sqrt{var(\hat{b}_1)} = \sqrt{0.0019} = 0.04$$

$$\frac{\hat{b}_1}{2} = \frac{1.37}{2} = 0.685$$

$$S(\hat{b}_1) < \frac{\hat{b}_1}{2}$$

$$0.04 < 0.685$$

نقبل بالفرضية البديلة ونرفض فرضية العدم اي ان المقدر معنوي

$$S(\hat{b}_2) = \sqrt{var(\hat{b}_2)} = \sqrt{0.0019} = 0.04$$

$$\frac{\hat{b}_2}{2} = \frac{0.11}{2} = 0.055$$

$$S(\hat{b}_2) > \frac{\hat{b}_2}{2}$$

$$0.04 < 0.055$$

نقبل بفرضية البديلة ونرفض فرضية العدم اي ان المقدر معنوي

$$t(\hat{b}_1) = \frac{\hat{b}_1}{S(\hat{b}_1)} = \frac{1.37}{0.04} = 34.25 > 2.541$$

نقبل الفرضية البديلة ونرفض فرضية العدم اي ان المقدر معنوي

$$t(\hat{b}_2) = \frac{\hat{b}_2}{S(\hat{b}_2)} = \frac{0.11}{0.04} = 2.75 < 2.541$$

نقبل بفرضية العدم ونرفض الفرضية البديلة اي ان المقدر غير معنوي

الحل /

١) مصفوفة التباين والتباين المشترك لمقدرات الميل

$$\Sigma ei^2 = \Sigma y^2 - \hat{b}_1 \Sigma y x_1 - \hat{b}_1 \Sigma y x_2$$
$$= 1274 - 1.37 \times 881 - 0.11 \times -83$$
$$= 76.16$$

$$\sigma u^2 = \frac{\Sigma ei^2}{n-K} = \frac{76.16}{6} = 12.069$$

$$Cov = Var(\hat{B}) = \sigma u^2 (X'X)^{-1}$$

$$Cov = Var(\hat{B}) = 2.069 \frac{\begin{bmatrix} 648 & 112 \\ 112 & 650 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 650 & 112 \\ 112 & 648 \end{vmatrix}}$$

$$Cov = Var(\hat{B}) = 2.069 \begin{bmatrix} \frac{648}{408656} & \frac{112}{408656} \\ \frac{112}{408656} & \frac{650}{408656} \end{bmatrix}$$

$$Cov = Var(\hat{B}) = 2.069 \begin{bmatrix} 0.0015 & 0.0002 \\ 0.0002 & 0.0015 \end{bmatrix}$$

$$Cov = Var(\hat{B}) = \begin{bmatrix} \underset{}{\overset{Var(\hat{b}_1)}{\boxed{0.0019}}} & 0.003 \\ 0.003 & \underset{Var(\hat{b}_2)}{\boxed{0.0019}} \end{bmatrix}$$

٢)

$$S(\hat{b}_1) = \sqrt{var(\hat{b}_1)} = \sqrt{0.0019} = 0.04$$

$$\frac{\hat{b}_1}{2} = \frac{1.37}{2} = 0.685$$

$$S(\hat{b}_1) < \frac{\hat{b}_1}{2}$$

$$0.04 < 0.685$$

نقبل بالفرضية البديلة ونرفض فرضية العدم اي ان المقدر معنوي

$$S(\hat{b}_2) = \sqrt{var(\hat{b}_2)} = \sqrt{0.0019} = 0.04$$

$$\frac{\hat{b}_2}{2} = \frac{0.11}{2} = 0.055$$

$$\boxed{S(\hat{b}_2) > \frac{\hat{b}_2}{2}}$$

$$0.04 < 0.055$$

نقبل بفرضية البديلة ونرفض فرضية العدم اي ان المقدر معنوي

$$t(\hat{b}_1) = \frac{\hat{b}_1}{S(\hat{b}_1)} = \frac{1.37}{0.04} = 34.25 > 2.541$$

نقبل الفرضية البديلة ونرفض فرضية العدم اي ان المقدر معنوي

$$t(\hat{b}_2) = \frac{\hat{b}_2}{S(\hat{b}_2)} = \frac{0.11}{0.04} = 2.75 < 2.541$$

نقبل بفرضية العدم ونرفض الفرضية البديلة اي ان المقدر غير معنوي

٣) حدود الثقة

$$pr\left[\hat{b}_1 - t\left(\frac{\alpha}{2}, n-K\right) \times S(\hat{b}_1) < \hat{b}_1 < \hat{b}_1 + t\left(\frac{\alpha}{2}, n-K\right) \times S(\hat{b}_1)\right]$$

$$95\left[1.37 - 2.541 \times 0.04 < 1.37 < 1.37 + 2.541 \times 0.04\right]$$

$$95\left[1.37 - 0.10 < 1.37 < 1.37 + 0.10\right]$$

$$95\left[1.27 < 1.37 < 1.47\right]$$

نلاحظ من فترة الثقة ان القيمة المقدرة لـ $\hat{b}_1$ تقترب من القيمة الحقيقية
بحد ادنى مقداره (1.27) وحد اعلى مقداره 1.47 ومستوى ثقة 95

$$pr\left[\hat{b}_2 - t\left(\frac{\alpha}{2}, n-K\right) \times S(\hat{b}_2) < \hat{b}_2 < \hat{b}_2 + t\left(\frac{\alpha}{2}, n-K\right) \times S(\hat{b}_2)\right]$$

$$95\left[0.11 - 2.541 \times 0.04 < 0.11 < 0.11 + 2.541 \times 0.04\right]$$

$$95\left[0.11 - 0.10 < 0.11 < 0.11 + 0.10\right]$$

$$95\left[0.01 < 0.11 < 0.21\right]$$

ع) القوة التفسيرية للنموذج R^2 , R^{-2}

$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma e^2}{\Sigma y^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{76.16}{1274}$$

$$R^2 = 1 - 0.059$$

$R^2 = 0.95$ ان 95% من التغيرات الحاصلة في المتغير التابع يكون سببها وجود المتغيرات المستقلة وان 5% تعود الى وجود المتغير العشوائي .

$$R^{-2} = 1 - \boxed{(1 - R^2)\ \frac{n-1}{n-K}}$$

$$R^{-2} = 1 - \boxed{(1 - 0.95)\ \frac{8}{6}}$$

$$R^{-2} = 1 - \boxed{(0.05)\ 1.33}$$

$$R^{-2} = 1 - \boxed{0.07} \quad = R^{-2} = 1 - 0.07 = 0.924$$

= 92.4% وهذا يعني ان المتغيرين المستقلين X_1 ، X_2 يفسران حوالي 92.4% من التغير الحاصل في المتغير التابع Y وان النسبة الباقية والبالغة حوالي 7.6% تمثل تأثير متغيرات آخرى لم تدخل في المعادلة

٥) اختبر المعنوية الكلية من خلال جدول تحليل التباين اذا علمت ان قيمة F الجدولية عند مستوى معنوية 5%

$F(0.05, 2, 6) = 5.14$

$\Sigma \hat{y}^2 = \hat{b}_1 \Sigma y x_1 + \hat{b}_2 \Sigma y x_2$

$= 1.37 \times 881 + 0.11 \times -83$

$= 1206.97 + -9.13$

$= 1197.84$

$$F = \frac{\Sigma \hat{y}^2 / \overset{3-1}{K-1}}{\Sigma e^2 / n-K}$$

$$F = \frac{1197.84 / 2}{76.16 / 6}$$

$$F = \frac{598.92}{12.69} = 47.19 > 5.14$$

$F^* > F_{(0.05, 2, 6)}$

نقبل بالفرضية البديلة ونرفض فرضية العدم

اي ان النموذج يتمتع بعلاقة دالية اي ان المتغير المستقل له تأثير على المتغير التابع والعكس صحيح اي ان النموذج يسمح بمعنوية كلية

مصادر التباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط مجموع مربعات	F^*
RSS	1197.84	2	598.92	47.19
ESS	76.16	6	12.69	
TSS	1274	8		

قانون تباين
$$var(\hat{b}_0) = 64\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}_1^2 \Sigma x_2^2 + \bar{X}_1^2 - 2\bar{X}_1\bar{X}_2 \Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_1^2 \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_1 x_2)^2}\right]$$

٦) المرونة

$b_1 \times \frac{\bar{X}_1}{\bar{Y}}$

$b_2 \times \frac{\bar{X}_2}{\bar{Y}}$

المرونة الدخلية للاشتراكات
$$\boxed{E_{X_1} = \hat{b}_1 \times \frac{\bar{X}_1}{\bar{Y}}}$$

$$= 1.37 \times \frac{113}{117}$$

$= 1.323$ عالي المرونة ~~مرن~~

التغير في المتغير المستقل يؤدي الى تغير بمقدار اكبر في المتغير التابع

المرونة العرضية
$$E_{X_2} = \hat{b}_2 \times \frac{\bar{X}_2}{\bar{Y}}$$

$$= 0.11 \times \frac{106}{117}$$

$= 0.099$ غير مرن

٧) التنبؤ بعدد الاشتراكات لعام 2020

$$\hat{Y} = -49.89 + 1.37X_1 + 0.11X_2$$

$$\hat{Y}_{2020} = -49.89 + 1.37(135) + 0.11(112)$$

$$\hat{Y}_{2020} = 147.38$$