(م6) الأسبوع السادس الخميس ٤/٤/٢٠١٤ محاضرة تعويضي

الصيغة الرياضية لحساب المعلمات في نموذج الانحدار المتعدد

① - استخدام القيم الأصلية: طريقة المصفوفات

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \Sigma X_1 & \Sigma X_2 \\ \Sigma X_1 & \Sigma X_1^2 & \Sigma X_1 X_2 \\ \Sigma X_2 & \Sigma X_2 X_1 & \Sigma X_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma Y \\ \Sigma Y X_1 \\ \Sigma Y X_2 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{adj(X'X)}{|X'X|} = \frac{adj \begin{bmatrix} n & \Sigma X_1 & \Sigma X_2 \\ \Sigma X_1 & \Sigma X_1^2 & \Sigma X_1 X_2 \\ \Sigma X_2 & \Sigma X_2 X_1 & \Sigma X_2^2 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \Sigma X_1 & \Sigma X_2 \\ \Sigma X_1 & \Sigma X_1^2 & \Sigma X_1 X_2 \\ \Sigma X_2 & \Sigma X_2 X_1 & \Sigma X_2^2 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} = \frac{adj \begin{bmatrix} n & \Sigma X_1 & \Sigma X_2 \\ \Sigma X_1 & \Sigma X_1^2 & \Sigma X_1 X_2 \\ \Sigma X_2 & \Sigma X_2 X_1 & \Sigma X_2^2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} n & \Sigma X_1 & \Sigma X_2 \\ \Sigma X_1 & \Sigma X_1^2 & \Sigma X_1 X_2 \\ \Sigma X_2 & \Sigma X_2 X_1 & \Sigma X_2^2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \Sigma Y \\ \Sigma Y X_1 \\ \Sigma Y X_2 \end{bmatrix}$$

② - استخدام الانحرافات عن الوسط الحسابي: طريقة المعادلات الآنية المختصرة

$$\hat{b}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma y x_1 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma y x_2 & \Sigma x_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_2^2 \end{vmatrix}} = \frac{\Sigma y x_1 \Sigma x_2^2 - \Sigma y x_2 \Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_1^2 \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

$$\hat{b}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma y x_2 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma y x_1 & \Sigma x_1^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_2^2 \end{vmatrix}} = \frac{\Sigma y x_2 \Sigma x_1^2 - \Sigma y x_1 \Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_1^2 \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{X}_1 - \hat{b}_2 \bar{X}_2$$

(47)

بطريقة المصفوفات

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_2 x_1 & \sum x_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum y x_1 \\ \sum y x_2 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(X'X)}{|X'X|}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} = \frac{\operatorname{adj}\begin{bmatrix} \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_2 x_1 & \sum x_2^2 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_2 x_1 & \sum x_2^2 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} \sum y x_1 \\ \sum y x_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{X}_1 - \hat{b}_2 \bar{X}_2$$

(48)

: اختبار معنوية المعالم المقدرة

Tests of significance of the Parameter estimates

① معامل التحديد المتعدد (معامل مربع الارتباط المتعدد) $R^2_{Y.X_1X_2}$

The Coefficient of Multiple Determination (or the square multiple coefficient correlation

كما اسلفنا ان معامل التحديد يشير الى النسبة المئوية من القيمة الكلية في (Y) التي يشرحها او تفسرها المتغيرات المستقلة الموجودة في النموذج ... الخ

$$R^2_{Y.X_1X_2} = \frac{\sum \hat{y}^2}{\sum y^2} = \frac{\sum(\hat{Y}-\bar{Y})^2}{\sum(Y-\bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum e^2}{\sum y^2} = \frac{\sum y^2 - \sum e^2}{\sum y^2}$$

$$= \frac{\hat{b}_1 \sum y x_1 + \hat{b}_2 \sum y x_2}{\sum y^2} = \frac{\hat{b}_1^2 \sum x_1^2 + \hat{b}_2^2 \sum x_2^2}{\sum y^2}$$

ان الصيغة العامة لمعامل التحديد اعلاه لا تراعي درجات الحرية نتيجة اضافة متغيرات مستقلة جديدة للنموذج، لذا لا بد من احتساب معامل التحديد المصحح او المعدل $\bar{R}^2$

② معامل التحديد المعدل $\bar{R}^2$ The Adjusted coefficient of Determination

ان اضافة متغيرات مستقلة جديدة تؤدي الى زيادة جودة التوفيق الذي يرفع من قيمة معامل التحديد، وبالتالي فان درجات الحرية تتناقص كلما اضفنا عددا جديدا من المتغيرات المستقلة الى النموذج وعلى اساس ذلك يتم احتساب معامل التحديد المعدل والذي ~~يأخذ~~ يأخذ الصيغة التالية :-

$$\bar{R}^2 = 1 - \left[(1-R^2)\frac{n-1}{n-k}\right]$$

$$\cancel{\bar{R}^2 = 1 - \left[\frac{\sum e^2/(n-k)}{\sum y^2/(n-1)}\right]}$$

ومن الجدير بالذكر انه ~~قيمة~~ ازدياد عدد المتغيرات تقترب قيمة $\bar{R}^2$ من قيمة R . اما في العينات الصغيرة وكان هناك عدد كبير من المتغيرات المستقلة تكون $\bar{R}^2$ اقل ~~من~~ للتحديد R^2 وربما تكون ذا قيمة سالبة ولهذا تهمل الاشارة وتكتب قيمتها صفراً .

③ تباين ومتوسط المعلمات المقدرة

The mean and variance of the Parameter Estimates $\hat{a}, \hat{b}_1, \hat{b}_2$

كما في نموذج الانحدار البسيط فان المقدرات $\hat{a}, \hat{b}_1, \hat{b}_2$ هي مقدرات غير متحيزة لثوابت المجتمع المناظرة لها وهي التي تم التوصل اليها في النموذج بمتغيرين وان ~~قيمة~~ المتوسط لها يساوي القيمة المتوقعة

$$E(\hat{a}) = a \quad , E(\hat{b}_1) = b_1 \quad , E(\hat{b}_2) = b_2$$

اما تباين كل من المقدرات اعلاه فهي تأخذ الصيغ الاتية

$$Var(\hat{a}) = \sigma_u^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}_1^2 \Sigma x_2^2 + \bar{X}_2^2 \Sigma x_1^2 - 2\bar{X}_1 \bar{X}_2 \Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_1^2 \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_1 x_2)^2} \right]$$

$$Var(\hat{b}_1) = \sigma_u^2 \frac{\Sigma x_2^2}{\Sigma x_1^2 \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

$$Var(\hat{b}_2) = \frac{\sigma_u^2 \Sigma x_1^2}{\Sigma x_1^2 \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

$$\sigma_u^2 = \frac{\Sigma e_i^2}{n-k} = \frac{\Sigma y^2 - \hat{b}_1 \Sigma x_1 y - \hat{b}_2 \Sigma x_2 y}{n-k}$$

$$= \frac{\Sigma y^2 (1-R^2)}{n-k} = \frac{\Sigma y^2 - \hat{b}_1^2 \Sigma x_1^2 - \hat{b}_2^2 \Sigma x_2^2}{n-k}$$

(4) - الخطأ المعياري — the standard error test

نقارن بين نصف القيمة المقدرة والخطأ المعياري لتقديرها، فاذا كان

$$S(\hat{\beta}) < \frac{\hat{\beta}}{2}$$

فالتقدير معنوي احصائياً والعكس صحيح

حيث ان $S(\hat{\beta}) = \sqrt{var(\hat{\beta})}$

(5) - اختبار t — t test

نقارن بين t الجدولية والمحسوبة، حيث ان

$$t^*(\hat{\beta}) = \frac{\hat{\beta}}{S(\hat{\beta})}$$

فاذا كان

$$t^* > t$$

فالتقدير معنوي احصائياً. والعكس صحيح

حيث يتم مقارنة المحسوبة مع الجدولية عند مستوى معنوية 5% واختبار ذو الذيلين المعنوية) ودرجة حرية $(n-k)$

ويمكن كتابة بعض الصيغ بصيغة المصفوفات كالآتي :

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}' X' Y}{Y'Y} = \frac{\hat{\beta}_1 \sum x_1 y + \hat{b}_2 \sum x_2 y}{\sum y^2}$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{e'e}{n-k} = \frac{Y'Y - \hat{\beta}' X' Y}{n-k}$$

وحساب التباين والتباين المشترك للمقدرات بالطريقة الآتية

$$\text{var-cov}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}_u^2 (X'X)^{-1}$$

$$= \hat{\sigma}_u^2 \begin{bmatrix} n & \sum X_1 & \sum X_2 \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1 X_2 \\ \sum X_2 & \sum X_2 X_1 & \sum X_2^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

or

$$= \hat{\sigma}_u^2 \begin{bmatrix} \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_2 x_1 & \sum x_2^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

52

Analysis of variance (ANOVA)

5- تحليل التباين

بشكل عام سيتم استخدام تحليل التباين في تحليل الانحدار لاجراء مختلف اختبارات المعنوية، ونذكرها فيما يأتي:

1- اختبار المعنوية الكلية للانحدار

Testing the overall significance of a regression

يهدف هذا الاختبار الى التعرف على ما اذا كانت المتغيرات التوضيحية $(X_1, X_2 \dots X_n)$ تؤثر في المتغير التابع تأثيرا كبيرا، ويتم الاختبار وفق الخطوات الآتية:

1- تحديد فرض العدم والفرض البديل

$$H_0: a = b_1 = b_2 = \dots b_m = 0$$

H_1: ليس كل المعاملات مساوية للصفر

2- يجري هذا الاختبار باستخدام جدول تحليل التباين وكالآتي.

مصادر التغير Source of variation S.V	مجموع المربعات Sum of squares S.S	درجات الحرية Degrees of freedom (d.f)	متوسط مربع الخطأ Mean square error M.S.E	F^*
التغيرات الموضحة Explained var.	$\sum \hat{y}^2 = \beta' X' y$ $= b_1 \sum x_1 y + b_2 \sum x_2 y$	$K-1$	$\sum \hat{y}^2 / K-1$ $\beta' X' y / K-1$	$F^* = \frac{\sum \hat{y}^2 / K-1}{\sum e^2 / n-K}$
التغيرات غير الموضحة UnExplained var.	$\sum e^2 = e'e$ $= \sum y^2 - \sum \hat{y}^2$ $= y'y - \beta' X' y$	$n-K$	$\sum e^2 / n-K$ $e'e / n-K$	$F^* = \frac{\beta' X' y / K-1}{e'e / n-K}$
التغيرات الكلية Total V.	$\sum y^2 = y'y$ $= \sum \hat{y}^2 + \sum e^2$	$n-1$		

3- نستخرج قيمة F الجدولية

$$F(\alpha, V_1, V_2)$$

$V_1 = K-1$, $V_2 = n-K$

4- نقارن بين F^* المحسوبة و F الجدولية فاذا كانت

$F^* > F$ فالانحدار معنوي ونرفض فرض العدم

$F^* < F$ فالانحدار غير معنوي ونقبل فرض العدم