الأسبوع الثامن 2017/4/23

39

خواص مقدرات المربعات الصغرى
Propertries of the Least Squares Estimates

تنص نظرية كاوس - ماركوف Guss-markov theory ان طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) تعطي افضل تقدير خطي غير متحيز اي انها تعطي (BLUE)

Best Linear Unbiased Estimates

بشرط تحقق كافة فروض حد الخطأ العشوائي

ان هذه النظرية تعد ضمان لتطبيق (OLS) وتفضيلها على غيرها من الطرق المستخدمة في التقدير لنموذج خطي ومعادلة مفردة وسنوضح مضمون هذه النظرية وخاصيتها من خلال تلك الخواص

① - الخطية Linearity

تعني خطية مقدر معين وانه يشكل دالة خطية لمشاهدات العينة

فمثلاً نقول ان الوسط الحسابي هو مقدر خطي ولمعرفة مضمون ذلك نقول انه مقدر خطي اذا اخذ الصيغة الاتية.

$$w_1X_1 + w_2X_2 + w_3X_3 + \text{——} + w_nX_n$$

حيث W ثابت يمكن ان نفحص ما ان الوسط الحسابي هو مقدر خطي من خلال

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{1}{n}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \text{——} + Y_n)$$

$$= \frac{1}{n}Y_1 + \frac{1}{n}Y_2 + \frac{1}{n}Y_3 + \text{——} \frac{1}{n}Y_n$$

$\frac{1}{n}$ ثابت لذا افترض له بالرمز W

$$\bar{Y} = W_1Y_1 + W_2Y_2 + W_3Y_3 + \text{——} + W_nY_n$$

لذا هو مقدر خطي

ص

ولان سنبرهن هذه الخاصية لـ $(\hat{a})$ و $(\hat{b})$ وللتبسيط النظري نقدم بعض المعطيات

$$\sum w_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2} , \quad \sum w_i = 0 , \quad \sum w_i x_i = 1 , \quad \sum w_i X_i = 1 , \quad E u_i = 0$$

$$w_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2} , \quad \sum u_i = 0 , \quad E u_i^2 = \sigma_{u_i}^2$$

ان تقديرات الانحدار الصغرى هي دوال خطية في قيم العينة المشاهدة Y_i

$$\hat{a} = f(Y_i) \quad و \quad \hat{b} = f(Y_i)$$

1

$$\hat{b} = f(Y_i)$$

$$\hat{b} = \frac{\sum y_i x_i}{\sum x_i^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y_i = Y_i - \bar{Y} \\ x_i = X_i - \bar{X} \end{array}}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i (Y_i - \bar{Y})}{\sum x_i^2} = \frac{\sum Y_i x_i - \underbrace{\bar{Y} \sum x_i}_{=0}}{\sum x_i^2}$$

$$\sum x_i = 0 , \quad w_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum Y_i x_i}{\sum x_i^2}$$

$$\boxed{\hat{b} = \sum w_i Y_i}$$

النتيجة: $\hat{b}$ دالة خطية لقيم المتغير التابع (Y_i)

$$\hat{b} = f(Y_i)$$

2

$$\hat{a} = f(Y_i)$$

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b} \bar{X}$$

$$\hat{b} = \sum w_i Y_i$$

$$\hat{a} = \bar{Y} - \bar{X} \sum w_i Y_i$$

$$= \frac{\sum Y}{n} - \bar{X} \sum w_i Y_i = \sum \left[\frac{Y_i}{n} - \bar{X} w_i Y_i \right]$$

$$= \sum \left[\frac{1}{n} - \bar{X} w_i \right] Y_i$$

وبما ان $\bar{X}$ و w_i هي ثوابت فان $\hat{a}$ تعتمد قيم Y_i مقدرة

اي ان $\hat{a}$ دالة خطية في قيم العينة Y_i

$$\hat{a} = f(Y_i)$$

(ثانياً) - خاصية عدم التحيز Unbiasedness

نعرف التحيز لأي مقدر بأنه الفرق بين الوسط المتوقع لهذا المقدر وقيمة المعامل الحقيقي

$$Bias = E(\hat{a}) - a$$
$$Bias = E(\hat{b}) - b$$

ويكون المقدر غير متحيز اذا كان التحيز مساوياً للصفر، اي ان

$$E(\hat{a}) = a \quad , \quad E(\hat{b}) = b$$

ويعني ذلك ان قيمة المقدر غير المتحيز تقترب من القيمة الفعلية للمعامل، والمقدر غير المتحيز يعطينا في المتوسط القيمة الحقيقية للمعامل

ولاثبات هذه الفرضية لكل من $\hat{a}$ و $\hat{b}$ تكون وفقاً للآتي

1:

$$\hat{a} = \sum\left[\frac{1}{n} - \bar{X} w_i\right] Y_i$$

$$E(\hat{a}) = \sum\left[\frac{1}{n} - \bar{X} w_i\right] E(Y_i)$$

بما ان $E(Y_i) = a + bX_i$

$$E(\hat{a}) = \sum\left[\frac{1}{n} - \bar{X} w_i\right](a + bX_i)$$
$$= \sum\left[\frac{a}{n} + \frac{bX_i}{n} - a\bar{X} w_i - b\bar{X} w_i X_i\right]$$
$$= \frac{\cancel{n}a}{\cancel{n}} + b\frac{\sum X_i}{n} - a\bar{X}\sum w_i - b\bar{X}\sum w_i X_i$$

$$\sum w_i = 0 \quad \sum w_i X_i = 1$$

$$E(\hat{a}) = a + \cancel{b\bar{X}} - 0 \cancel{- b\bar{X}}$$

$$\boxed{E(\hat{a}) = a}$$

2:

$$E(\hat{b}) = b$$

$$\hat{b} = \sum w_i Y_i$$
$$= \sum w_i (\underbrace{a + bX_i + u_i}_{Y_i})$$
$$= a\sum w_i + b\sum w_i X_i + \sum w_i u_i$$
$$\hat{b} = b + \sum w_i u_i$$
$$E(\hat{b}) = E(b) + E(\sum w_i u_i)$$
$$E(\hat{b}) = b + \sum E(w_i) E(u_i)$$

$$E(\hat{b}) = b$$

وذلك لان $E(u_i)$ مفترضة = 0 وبما ان b ثابت فان القيمة المتوقعة للثابت هي القيمة نفسها

خ٩ تباين

③ - خاصية أصغر تباين أو أفضل مقدر (Best Estimator) PROPERTY

The minimum variance

يعتبر أي مقدر أفضل من غيره من المقدرات إذا كان تباينه أصغر من التقديرات الأخرى التي نحصل عليها من طرق القياس الأخرى ، والصيغة رياضياً نقول أن ($\hat{b}$) مثلاً يعتبر أفضل مقدر إذا كان

$$var(\hat{b}) < var(b^*)$$

$$E[\hat{b} - E(\hat{b}_i)]^2 < E[b^* - E(b_i^*)]^2$$

حيث أن b^* أي تقدير آخر للمعامل الحقيقي b_i

حيث أن الصيغة الرياضية لحساب تباين $\hat{b}$ هي

$$Var(\hat{b}) = \frac{\sigma_u^2}{\Sigma x_i^2}$$

البرهان

$$\hat{b} = \Sigma w_i Y_i$$

$$Var(\hat{b}) = Var(\Sigma w_i Y_i)$$

$$= \Sigma w_i^2 \, var(Y_i)$$

ملاحظة - عند حصول (var) الثابت لمجموع أي مقدار ثابت لا يأخذ التباين (var) مضروب في مقدار ما (var) فإن الناتج يكون عبارة عن مجموع مربع الثابت مضروب في (var) المتغير

$$Var(\Sigma w_i Y_i) = \Sigma w_i^2 \, var(Y_i)$$

$$Var(\hat{b}) = \Sigma w_i^2 \sigma_u^2 = \sigma_u^2 \Sigma w_i^2$$

$$\Sigma w_i^2 = \frac{1}{\Sigma x_i^2}$$

$$\boxed{Var(\hat{b}) = \frac{\sigma_u^2}{\Sigma x_i^2}}$$

أصغر تباين أفضل مقدر

43

ومن الصفات الرياضية للمقدرات تباين $(\hat{a})$ هي

$$Var(\hat{a}) = \sigma_u^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x_i^2} \right)$$

OR, $$Var(\hat{a}) = \frac{\sigma_u^2 \sum X_i^2}{n \sum x_i^2}$$

البرهان

$$\hat{a} = \sum \left[\left(\frac{1}{n} - \bar{X} w_i \right) \right] Y_i$$

$$Var(\hat{a}) = var \left[\sum \left(\frac{1}{n} - \bar{X} w_i \right)^2 Y_i \right]$$

$$= \sigma_u^2 \sum \left(\frac{1}{n^2} - \frac{2\bar{X} w_i}{n} + \bar{X}^2 w_i^2 \right)$$

$$var(Y_i) = \sigma_u^2$$

$$var(\hat{a}) = \sigma_u^2 \left(\frac{n}{n^2} - \frac{2\bar{X} \overset{0}{\sum w_i}}{n} + \bar{X}^2 \sum w_i^2 \right)$$

$$\boxed{var(\hat{a}) = \sigma_u^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x_i^2} \right)}$$

$$var(\hat{a}) = \sigma_u^2 \left(\frac{\sum x_i^2 + n\bar{X}^2}{n \sum x_i^2} \right)$$

$$\sum x_i^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$$

$$var(\hat{a}) = \sigma_u^2 \left(\frac{\sum X_i^2 \cancel{- n\bar{X}^2} \cancel{+ n\bar{X}^2}}{n \sum x_i^2} \right)$$

$$\boxed{Var(\hat{a}) = \frac{\sigma_u^2 \sum X_i^2}{n \sum x_i^2}}$$

(٣٧)

...من أن تكون العلاقة صحيحة ومساوية

...معنى أن تكون خالية من أخطاء الصياغة من حيث تحديد المتغيرات التوضيحية، ومن حيث

...ولنا جميع العلاقات اللازمة بالصورة الرياضية الصحيحة (خطية أو غير خطية).

...زيع المتغير التابع Y:

$Y_i \sim N(\alpha + \beta X_i, \sigma_u^2)$

توزيع المتغير التابع هو توزيع معتدل، تكون قيمة المتوسط فيه هي:

$$E(Y_i) = \alpha + \beta X_i$$

البرهان:

$$\text{mean of } Y_i = E(Y_i)$$
$$= E(\alpha + \beta X_i + u_i)$$
$$= \alpha + \beta X_i + E(u_i)$$
$$= \alpha + \beta X_i$$

لأن X_i اعتبرت ثابتة حسب الفرض السادس و $(E(u_i) = 0)$ حسب الفرض الثاني.

أما قيمة تباين (Y_i) variance فهي:

$$Var(Y_i) = E[Y_i - E(Y_i)]^2 = \sigma_u^2$$

البرهان:

$$Var(Y_i) = E(Y_i - E(Y_i))^2$$
$$= E(\alpha + \beta X_i + u_i - \alpha - \beta X_i)^2$$
$$= E(u_i)^2 = \sigma_u^2$$

وذلك حسب الفرض الثالث، الذي ينص على أن تباين قيم u هو مقدار ثابت.

ملاحظات وبراهين حول قيمة W_i:

الوزن الترجيحي

نفترض أن $W_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$

(1) $\sum W = 0$

البرهان:

$$W_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$$

$$\sum W_i = \sum\left(\frac{x_i}{x_i^2}\right) = \frac{\overbrace{\sum x_i}^{\text{صفر}}}{\sum x_i^2} = \frac{0}{\sum x_i^2} = 0$$

(2) $\sum W_i X_i = 1$

البرهان:

$$\sum W_i X_i = \sum\left(\frac{x_i}{\sum x_i^2} X_i\right) = \frac{\overset{\text{بالتعويض}}{\sum x_i X_i}}{\sum x_i^2}$$

$$= \frac{\sum (X_i - \bar{X})(X_i)}{\sum (X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum X_i^2 - \bar{X} \sum X_i}{\sum (X_i^2 - 2\bar{X} X_i + \bar{X}^2)} = \frac{\sum X_i^2 - \bar{X} \sum X}{\sum X_i^2 - 2\bar{X} \sum X_i + n\bar{X}^2}$$

(23)

$$\frac{\sum X_i^2 - \bar{X}\sum X_i}{\sum X_i^2 - 2n\bar{X}\sum X_i + n\bar{X}^2} = \frac{\sum X_i^2 - \bar{X}\sum X_i}{\sum X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2}$$

$$= \frac{\sum X_i^2 - \bar{X}\sum X_i}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2} = \frac{\sum X_i^2 - \bar{X}\sum X_i}{\sum X_i^2 - n\bar{X}\bar{X}} = \frac{\sum X_i^2 - \bar{X}\sum X_i}{\sum X_i^2 - n\bar{X}\frac{\sum X_i}{n}}$$

$$= \frac{\sum X_i^2 - \bar{X}\sum X_i}{\sum X_i^2 - \bar{X}\sum X_i} = 1$$

(3) $\boxed{\sum W_i X_i = \sum W_i x_i}$

zero $(W_i \bar{X})$

البرهان:

$$\sum W_i X_i = \sum [W_i(x_i + \bar{X})] = \sum [W_i x_i + W_i \bar{X}]$$

$$= \sum W_i x_i + \bar{X}\sum W_i = \sum W_i x_i + \bar{X}(0)$$

$$= \sum W_i x_i$$

(4) $\sum W_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2}$

البرهان:

$$\sum W_i^2 = \sum \left(\frac{x_i}{\sum x_i^2}\right)^2 = \frac{\sum x_i^2}{(\sum x_i^2)^2} = \frac{1}{\sum x_i^2}$$

(5) $\sum W_i Y_i = \hat{B}$

صفر

$$\hat{B} = \frac{\sum y_i x_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i (Y_i - \bar{Y})}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i Y_i - \bar{Y}\sum x_i}{\sum x_i^2}$$

$$= \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} = \sum \left(\frac{x_i}{\sum x_i^2} Y_i\right) = \sum W_i Y_i$$

Best, Linear, Unbiased Estimator (BLUE)

خصائص مقدرات المربعات الصغرى

أفضل مقدر خطي غير متحيز

(1) خاصية الخطية (Linearity): أي أن تقديرات المربعات الصغرى هي دوال خطية في قيم المتغير التابع

$\hat{\alpha} = f(Y_i)$, $\hat{B} = f(Y_i)$

(a) $\hat{B} = f(Y_i)$

البرهان:

$$\hat{B} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i (Y_i - \bar{Y})}{\sum x_i^2} = \frac{\sum (x_i Y_i - x_i \bar{Y})}{\sum x_i^2}$$

كيف حصل هذا

$$= \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} - \frac{\bar{Y}\sum x_i}{\sum x_i^2} = \frac{x_i \sum Y_i}{\sum x_i^2} = \sum W_i Y_i$$

$$\hat{B} = W_1 Y_1 + W_2 Y_2 + \dots + W_n Y_n$$

$$\therefore \hat{B} = f(Y_i)$$

أي أن خطية $\hat{B}$ هي دالة خطية لقيم المتغير التابع (Y_i):