58 الاولى
الاسبوع الثالث
c. 10/10/2019

مشاكل الاقتصاد القياسي
Econometric Problems

اختبارات الدرجة الثانية لفروض النموذج الخطي

Second-order Tests of the Assumptions of the Linear Regression Model

تناولنا في الفصول السابقة النموذج الخطي البسيط والنموذج الخطي المتعدد كما تناولنا الفرضيات الاساسية الواجب توفرها من اجل تقدير معالم النموذج، والتي تم ذكرها سابقاً وان الاخلال في بعض هذه الفرضيات سوف يؤدي الى بروز مشاكل متعددة منها:

أولاً - مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء (العشوائي)
ثانياً - مشكلة الارتباط الخطي المتعدد (التعدد الخطي)
ثالثاً - مشكلة عدم ثبات تجانس التباين.

أولاً - مشكلة الارتباط الذاتي Autocorrelation problem

من بين الافتراضات الاساسية التي تقوم عليها النموذج الخطي افتراض انعدام الارتباط بين قيم المتغير العشوائي U_i في السنة (t) وقيمته في السنوات السابقة U_{t-1}, U_{t-2} ـــ او السنوات اللاحقة U_{t+1}, U_{t+2} ـ الخ، أي ان قيم U_i تكون مستقلة عن بعضها البعض ويعبر عن ذلك بمساواة التباين المشترك للاخطاء المتتالية بالصفر أي ان

$$COV(U_i, U_j) = 0 \qquad i, j = 1, 2, 3 \text{ --- } n$$
$$i \neq j$$

وتعني في الوقت نفسه ايضاً عدم تأثير الظاهرة الاقتصادية المتحققة في السنة (t) على تلك التي ستتحقق في السنة ($t+1$)، غير ان الواقع الاقتصادي يشير الى عكس ذلك، اذ يوجد تأثير

للظاهرة الاقتصادية المتحقق في السنة (t) عن تلك التي ستتحقق في
السنة (t+1) ، (t+2) أو في السنوات السابقة (t-1) أو (t-2) ... الخ
ولذلك تظهر مشكلة الارتباط الذاتي في أغلب الدراسات التي تعتمد
السلاسل الزمنية (Time series data) ، وكذلك في البحوث التي تعتمد على
بيانات مقطعية (cross section data) وخاصة البيانات
المقطعية التي تأخذ شكل أوساط مجاميع (Grouping of observation)
وفي حالة اعتماد الأخطاء العشوائية كل لبعضها البعض ينتفي الفرض
الخاص بانعدام الارتباط بينها فتظهر مشكلة تدعى بمشكلة
الارتباط الذاتي The Autocorrelation
أي أن

$$Cov(U_i, U_j) \neq 0$$

2- مصادر الارتباط الذاتي Sources of Autocorrelation

يعود الارتباط الذاتي للأسباب التالية التي يمكن أن نوجزها بما يلي

① - حذف بعض المتغيرات المستقلة من العلاقة المدروسة بسبب الفرض، مثل عدم توفر البيانات المناسبة عنها أو لغرض تبسيط هيكل النموذج وقد تكون من بين هذه المتغيرات المحذوفة متغير أو أكثر مترابطة ذاتياً، الأمر الذي يؤدي إلى جعل العنصر العشوائي يتضمن المتغيرات المرتبطة، وعندئذ فإن هذا لا تعكس الأخطاء العشوائية في النموذج فحسب، إنما تعكس أيضاً المتغيرات المحذوفة.

② - معالجة البيانات: كثير من البيانات المنشورة أحياناً عمليات تقدير فقد يتم تقدير بعض المشاهدات اعتماداً على قيم مشاهدات أخرى، والواقع أن عمليات التنقيح والتقدير تعتمد في العادة على أخذ معدلات قيم المشاهدات المتتالية، مما يخلق علاقة بين أخطاء تلك المشاهدات وبالتالي التأثير على طبيعة توزيعها

(٢) - الصياغة غير الدقيقة للنموذج: بمعنى ان شكل العلاقة الدالية المستخدمة لا يتطابق مع الشكل الصحيح، فاذا افترضنا علاقة خطية بين المتغيرين Y و X في حين ان العلاقة الصحيحة غير خطية فانه يمكن ان ينتج عن ذلك ترابط ذاتي بين قيم حد الخطأ العشوائي U_t .

(٣) - الاثار الممتدة لبيانات السلاسل الزمنية: ان بعض العوامل العشوائية الطارئة وغير المتكررة قد ينتج عنها ترابط في قيم العنصر العشوائي U_t لاكثر من فترة زمنية واحدة، فالحروب والفيضانات والزلازل تمتد اثارها وانعكاساتها على فعالية الاقتصاد لعدة سنوات متتالية، مما يسبب حصول ارتباط ذاتي بين قيم هذا المتلاحقة .

(٤) طبيعة الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى :

يمكن تحديد نموذج الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى من خلال المعادلة التالية

$$U_t = \rho U_{t-1} + V_t$$

حيث ان ρ تمثل معامل الارتباط الذاتي وتقع قيمته ما بين

$$-1 < \rho < 1$$

حيث ان U_t تمثل الخطأ العشوائي في الفترة t

U_{t-1} الخطأ العشوائي للفترة السابقة و V_t حد الخطأ

وبالاعتماد على المعادلة السابقة يمكن التمييز بين حالتين

$$\rho = 0$$

ومعناه عدم وجود علاقة بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي وتكون

$$U_t = V_t$$

$$\rho \neq 0$$

ومعناه توجد مشكلة ارتباط ذاتي

141

② أنواع الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى

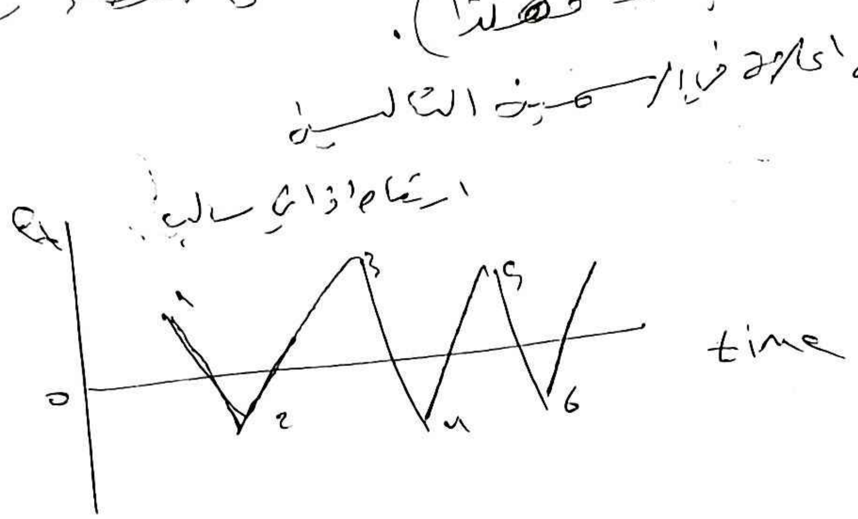
① - الارتباط الذاتي الموجب من الدرجة الأولى ويحدث عندما تكون سلسلة الأخطاء مجموعة موجبة ثم مجموعة سالبة - وهكذا) أي أن القيم المتعاقبة للخطأ العشوائي تحمل نفس الإشارة الجبرية أو الإشارات المتتالية في نفس الإشارة

② - الارتباط الذاتي السالب - ويحدث عندما تكون غالبية القيم المتعاقبة المتعدده المتعاقبة للخطأ العشوائي متبادل الإشارة الجبرية بين الموجب والسالب أي تكون سلسلة الأخطاء سالبة ثم موجبة ثم سالبة - وهكذا).

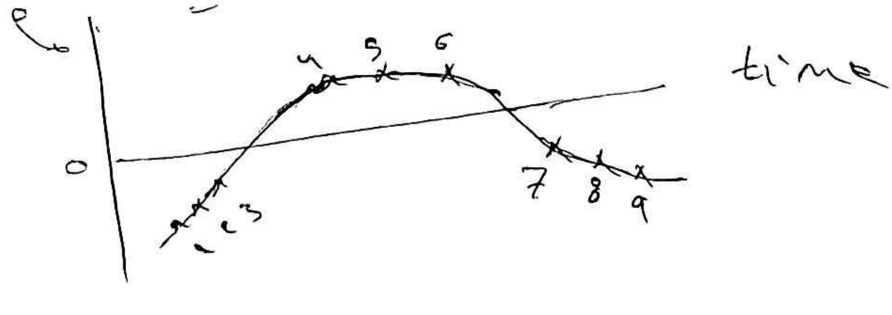
ويمكن توضيح ذلك في الرسوم التالية

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

ارتباط ذاتي سالب



ارتباط ذاتي موجب



(Gt)

الآثار او النتائج المترتبة على وجود الارتباط الذاتي

Consequences ~~and~~ or result of Autocorrelation

1- تصبح قيم المقدرات غير صحيحة، ودرجة عدم الصحة تتوقف على درجة ونوع الارتباط الذاتي

2- تبقى مقدرات المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) تتصف بالخاصية الكفؤة وعدم التحيز الا انها تفقد خاصية افضل واقل تباين (حيث ان التباين بوجود الارتباط الذاتي يفوق التباين في غياب الارتباط الذاتي)

3- يقع اثر الارتباط الذاتي في نتائج تحليل الانحدار، فتصبح الاختبارات t و F و R^2 نتائج اقل دقة من تلك في حالة عدم وجود الارتباط الذاتي، حيث تستند تلك الاختبارات على التباين والخطأ المعياري، فارتفاع قيمة R^2 لا تعكس الا انه شكل وهمي.

4- عدم دقة التنبؤات المستحصلة من النموذج بـ (OLS) لان تباينها الحقيقي هو اكبر من التباين المقاس، مما يتطلب استخدام طرق اخرى للتقدير كطريقة المربعات الصغرى العامة او الشاملة (GLS)

Generalized Lest Squares method

لانها تعطي افضل تقدير خطي غير متحيز في حالة وجود الارتباط الذاتي شريطة ان تكون قيمة (ρ) معلومة.

5- يصبح تقدير التباين للمقدر المشوه اقل من القيمة الحقيقية له، ويكون الفرق اكبر في حالة الارتباط الذاتي الموجب.

Test of Autocorrelation

٤٨ - اختبار وجود الارتباط الذاتي :

هناك عدة طرق لاختبار وجود الارتباط الذاتي منها :-

أ- ابسط طريقة لوجود الارتباط الذاتي فنقوم بتقدير معادلة الانحدار ثم نفحص في حد الخطأ الناتج من معادلة الانحدار (e_i) من حيث الإشارة الجبرية، فإذا لم تكن هناك نمط في قيم حدود الخطأ مثل (+) أو (−) فلا يوجد ارتباط ذاتي، فكما رأينا في أنواع الارتباط الذاتي فإن الارتباط الذاتي يظهر على شكل وجود مجموعة من (+) ومجموعة من (−) من جهة، ووجود (+) و (−) بشكل متناوب من جهة ثانية.

ب- اختبار فون نيومان :- يستخدم هذا الاختبار للعينات الكبيرة التي يكون عدد المشاهدات فيها أكثر من (30) مشاهدة، وتكون نسبة فون نيومان هي

$$F.N = d^* = \frac{\sum_{i=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2 / n-1}{\sum_{i=1}^{n} (e_t - \bar{e})^2 / n}$$

وتقارن هذه النسبة بقيمة d من الجداول عند مستوى المعنوية المطلوب، ودرجات الحرية (n−k)، ويلاحظ من الجداول أن هناك قيمة d لها حدان، حد أعلى (du) وحداً أدنى (dL) ثم مستوى معنوية، فإذا كانت قيمة d المحسوبة تقع بين هذين الحدين الحرجين دل ذلك على وجود ارتباط ذاتي للبواقي.

ج-

64 (Test Drbin-watson) ③ اختبار دربن واتسون

يعتبر هذا الاختبار من اكثر الاختبارات شيوعاً واستخداماً حيث يطبق في العينات الصغيرة، ويتلخص هذا الاختبار في:

١- تحديد الفرضيات
فرض العدم $H_0: \rho = 0$ عدم وجود ارتباط ذاتي
الفرض البديل $H_1: \rho \neq 0$ وجود ارتباط ذاتي

② - تقدير قيمة (D.W) بموجب الصيغة التالية

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

وفي الواقع التطبيقي يتم احتساب الأخطاء العشوائية للنموذج أعلاه كالآتي

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

③- لغرض اجراء الاختبار يستوجب ان نجد القيمة العليا (du) والقيمة الدنيا (dL) والمتوفرة في جدول خاص مسمى بنفس اسم (دربن واتسون) وتكون محسوبة على اساس درجات الحرية (n) وعدد المتغيرات المستقلة (K) ولمستوى معنوية معين، وعليه فان قبول فرضية العدم او رفضه يتم على اساس التوزيع التالي:

ومن خلال الرسم نشاهد لدينا الاحتمالات الخمسة التالية

1 → $0 < d < d_L$ (نرفض H_0 حيث يوجد ارتباط ذاتي موجب)

2 → $d_L < d < d_U$ (لا يمكن الجزم بنتيجة الاختبار فاشل)

3 → $d_U < d < 4 - d_U$ (نقبل H_0 حيث لا وجود للارتباط الذاتي)

4 → $4 - d_U < d < 4 - d_L$ (لا يمكن الجزم بنتيجة الاختبار فاشل)

5 → $4 - d_L < d < 4$ (نرفض H_0 ويوجد ارتباط ذاتي سالب)

العلاقة بين d و ρ

$$(D.W) \quad d = 2 - 2\rho = 2(1 - \rho)$$

أو -

$$\rho = 1 - \frac{d}{2}$$

لذلك فان قيمة d تتراوح بين الصفر والاربعة

if : $d = 0 \rightarrow \rho = 1$

if $d = 2 \rightarrow \rho = 0$

if $d = 4 \rightarrow \rho = -1$

ملاحظة Note

اذا كان لدينا في النموذج متغيراً متأخراً زمنياً لا يمكن استخدام اختبار (D.W) للتحقق من مشكلة الارتباط الذاتي وانما نستخدم اختبار (h) وعلى الصيغة التالية

$$h = 1 - \frac{D.W}{2} \sqrt{\frac{n}{1 - n(\text{Var}\,\hat{b})}}$$

66

ك/ج مشكلة الارتباط الذاتي

تتوقف الطريقة التي تعالج مشكلة الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى على سبب حدوث المشكلة اي انه

١ - عندما تكون السبب هو اهمال متغير او متغيرات مستقلة من النموذج فيمكن اضافة ذلك المتغير او المتغيرات الى النموذج.

ب - عندما يكون سبب المشكلة هو الصياغة غير الدقيقة للنموذج فان المعالجة تتوقف على اعادة صياغة النموذج المراد دراسة من او صيغة العلاقة

ج - اما اذا كان سبب المشكلة هو وجود علاقة خطية بين قيم الخطأ او المتغير العشوائي فيصبح هنا لا بد من تحويل المتغيرات المستقلة بالشكل الذي يضمن التخلص من الارتباط الذاتي فاذا كان الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى فيمكن تحويل المتغيرات المستقلة في النموذج المراد دراسته باحد الطرق الاتية.

أ - طريقة التحويل

ب - طريقة التكرار

ج - طريقة الفرق العام

د - طريقة الفرق الاول

وسوف نوضح الكيفية التي يتم بها معالجة الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى باستخدام طريقة التكرار فقط

طريقة التكرار Iterative method

وبموجب هذه الطريقة نتبع الخطوات الاتية:

أ - فمثلا باستخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) لتقدير معلمات النموذج ... ولغرض الايضاح نفترض نموذجا يتضمن متغير مستقل واحد فقط

$$Y_t = a + bX_t + U_t$$

حيث تم الحصول على تقدير للنموذج

$$\hat{Y}_t = \hat{a} + \hat{b}X_t$$

67

② ـ باستخدام الـ O.L.S حيث المعادلات يتم احتساب البواقي (e_t) الاخطاء عن الفرق بين القيمة المشاهدة والقيمة التقديرية للمتغير المعتمد

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

③ ـ نقوم باحتساب قيمة معامل الارتباط الذاتي $\hat{\rho}$ وفقاً للصيغ الآتية

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2}$$

or

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{d}{2}$$

② ـ نقوم باستبعاد اثر معامل الارتباط الذاتي من بيانات العينة من خلال احتساب قيم جديدة لـ Y_t هي Y_t^* وقيم جديدة لـ X_t هي X_t^* باستخدام المعادلتين التاليتين

$$Y_t^* = Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}$$

$$X_t^* = X_t - \hat{\rho} X_{t-1}$$

③ ـ نقوم بتقدير دالة انحدار جديدة لـ X_t^* بالنسبة لـ Y_t^*

$$\hat{Y}_t^* = \hat{a}^* + \hat{b}^* X_t^*$$

④ نقوم باختبار قيمة D.W باستخدام الصيغ التالية

$$d^* = \frac{\sum_{t=2} (e_t^* - e_{t-1}^*)^2}{\sum e_t^{*2}}$$

⑤ ـ اذا ظهر من خلال الاختبار عدم وجود مشكلة الارتباط الذاتي نقوم باعتماد الدالة المقدرة الجديدة واذا كان هناك وجود مشكلة ارتباط ذاتي مرة ثانية فنعيد العملية من جديد باتباع الخطوات من (١ ـ ٤).